

---

# Appendix

---

- I. 主要な物理定数と単位変換
  - II. 立体角
  - III. ベクトル解析
  - IV. ガウスの発散定理
  - V. 一階および二階の常微分方程式の解法
  - VI. 双曲線関数
  - VII. ルジャンドル関数
  - VIII. ベッセル関数
  - IX. ラプラス変換
  - X. フーリエ変換
-

## I. 主要な物理定数と単位変換

名称	記号	数値	単位
<b>物理定数</b>			
真空中の光速	$c$	$2.997\,924\,58 \times 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
アボガドロ数	$N_A$	$6.022\,141\,79(30) \times 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$
ボルツマン定数	$k$	$1.380\,650\,4(24) \times 10^{-23}$	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
素電荷	$e$	$1.602\,176\,487(40) \times 10^{-19}$	C
プランク定数	$h$	$6.626\,068\,96(33) \times 10^{-34}$	$\text{J} \cdot \text{s}$
<b>静止質量</b>			
中性子の静止質量	$m_n$	$1.674\,927\,211(84) \times 10^{-27}$	kg
		939.565 346(23)	MeV
陽子の静止質量	$m_p$	$1.672\,621\,637(83) \times 10^{-27}$	kg
		938.272 013(23)	MeV
電子の静止質量	$m_e$	$9.109\,382\,15(45) \times 10^{-31}$	kg
		0.510 998 910(13)	MeV
<b>単位</b>			
原子質量単位	u	$1.660\,538\,782(83) \times 10^{-27}$	kg
		931.494 028(23)	MeV
電子ボルト	eV	$1.602\,176\,487(40) \times 10^{-19}$	J
ワット	W	1.0	$\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$
キロワット時	kWh	$3.6 \times 10^6$	J
メガワット日	MWd	$8.64 \times 10^{10}$	J
反応断面積	barn	$1.0 \times 10^{-28}$	$\text{m}^2$
吸収線量 (グレイ)	Gy	1.0	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
線量当量 (シーベルト)	Sv	1.0	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
放射能 (ベクレル)	Bq	1.0	$\text{s}^{-1}$

科学技術データ委員会 (CODATA, Committee on Data for Science and Technology) による2006年推奨値。( )内は誤差を表し、たとえば、 $1.2345678(11) \times 10^9$ は $1.2345678 \times 10^9 \pm 0.0000011 \times 10^9$ を意味する。

## II. 立体角 (Solid angle)

ある物体を見たとき、その物体が視野のどのくらいを占めているかを表す指標が立体角である。点Oと曲面Cを考える。曲面C上の全ての点と点Oとを直線で結んでできた錐体を錐体O-Cとおく。この錐体O-Cが点Oを中心とする半径1の球、すなわち単位球から切り取る図形を曲面C'とおく。この曲面C'の面積のことを、曲面Cの点Oに対する立体角 $\Omega$ という。

ただし、図II.1では分かりやすくするためにCとC'を相似形としたが、曲面Cと点Oの位置関係によっては必ずしも相似形になるとは限らないことに注意する必要がある。

次に、微小な立体角 $d\Omega$ を求める。図II.2のように単位球から切り取られた曲面C'の面積を考える。

図II.2において、点Aは曲面C'上の任意の点、点Bは点Aからxy平面上に下ろした垂線の足、 $\theta$ 、 $\varphi$ はそれぞれ極角および方位角を表す。

ここで曲面C'内ではAが $\theta$ 方向に $d\theta$ だけ、 $\varphi$ 方向に $d\varphi$ だけ移動できるものと仮定すると、図II.2より $OA=1$ 、 $OB=\sin\theta$ となり、 $d\theta$ と $d\varphi$ を微小量とすると、 $d\Omega$ は長方形に近似できる。

図II.3において、点P、Q、R、Sは長方形の各頂点を表す。図II.3より、辺PQについては

$$PQ=1 \times d\theta = d\theta \quad \text{..... (II.1)}$$

となる。また同様に、辺QRについては

$$QR=\sin\theta \times d\varphi = \sin\theta d\varphi \quad \text{..... (II.2)}$$

となる。したがって、 $d\Omega$ は(II.1)、(II.2)式より、

$$d\Omega=PQ \cdot QR=\sin\theta d\theta d\varphi \quad \text{..... (II.3)}$$

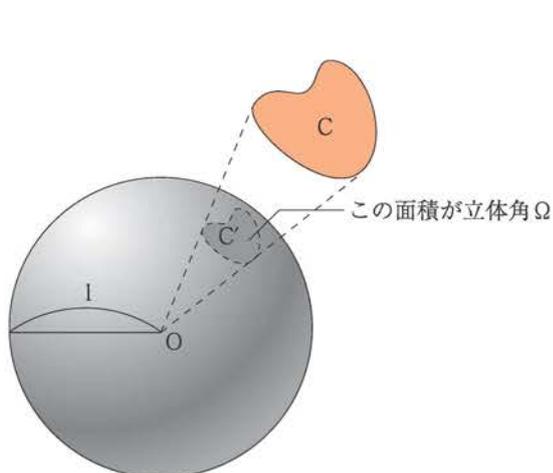
となる。

また、 $d\Omega$ を全方向で積分すると、(II.3)式より、

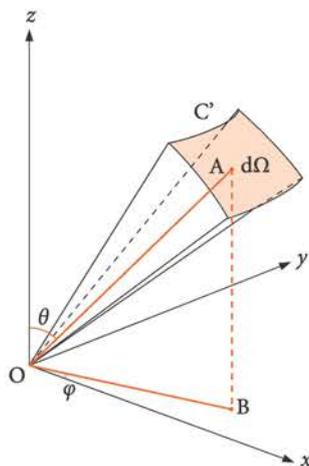
$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \\ &= 4\pi \end{aligned} \quad \text{..... (II.4)}$$

となる。従って、単位球の表面積 $4\pi$ に等しくなる。これは、立体角 $\Omega$ が単位球で定義されていることから妥当である。また、求める体系が $1/8$ 対称、 $1/4$ 対称のときはそれぞれ $1/8$ 球、 $1/4$ 球で考慮することができる。

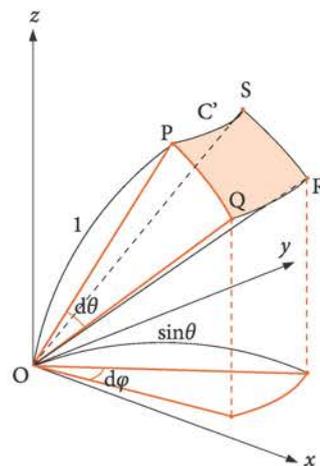
ここで、 $1/8$ 球の全立体角は



図II.1 立体角



図II.2 立体角の微分



図II.3 立体角の微分形 $d\Omega$ の導出

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \quad \dots\dots\dots (II.5) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

となる。また同様に、1/4球の全立体角については

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \quad \dots\dots\dots (II.6) \\ &= \pi\end{aligned}$$

となる。

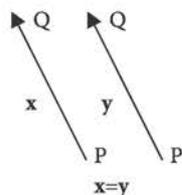
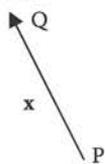
### III. ベクトル解析 (Vector calculus)

物理を含む諸科学には様々な物理量が存在する。温度、質量、速度、圧力などは普通の生活でも聞いたことがあるであろう。それらの中には大きさのみで表されるものと、大きさと向きで表されるものがある。代表的な物理量の中で前者に該当するものには質量、電荷、諸定数などがあり、これらをスカラーという。また、後者に該当するものには速度、加速度、力などがあり、これらをベクトルという。ベクトルの表記には、 $\vec{x}$ のように文字の上に矢印をつける場合もあるが、ここでは $\mathbf{x}$ のように太文字(ボールド)を用いて表す。

ベクトル $\mathbf{x}$ を図形的に表すと図III.1のように矢印で表された線分PQとなる。ベクトル $\mathbf{x}$ はPからQへの方向をもっている。また、線分PQの長さをベクトル $\mathbf{x}$ の大きさといひ $|\mathbf{x}|$ と表す。図III.2に示すように、2つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ があり、その大きさと向きが一致している場合、両者は等しいといえ、

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \dots\dots\dots (III.1)$$

と書ける。



図III.1 ベクトルの幾何学的表現

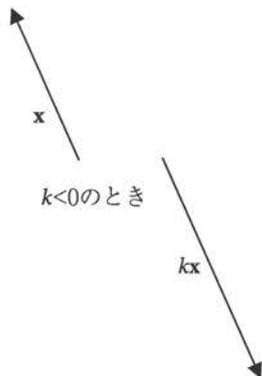
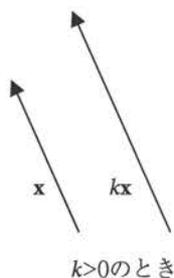
図III.2 ベクトルの相等

ベクトル $\mathbf{x}$ と任意のスカラー $k$ に対し、スカラーとベクトルの積(ベクトルのスカラー倍) $k\mathbf{x}$ を以下のように定義する。

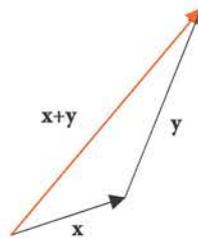
- 1)  $k\mathbf{x}$ の大きさは $|k| \times |\mathbf{x}|$
- 2)  $k > 0$ であれば $k\mathbf{x}$ の方向は $\mathbf{x}$ と同じ、 $k < 0$ であれば $k\mathbf{x}$ の方向は $\mathbf{x}$ の逆方向

この定義を図で示すと、図III.3のようになる。

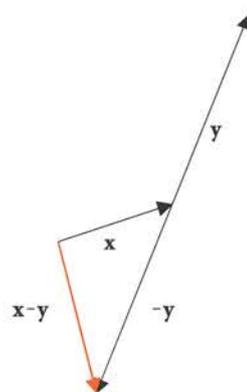
二つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の和 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ は、 $\mathbf{x}$ の終点と $\mathbf{y}$ の始点を結合して作られる折れ曲がった矢印の始点( $\mathbf{x}$ の始点)と終点( $\mathbf{y}$ の終点)を結んだものとなる。これを図に表すと、図III.4のようになる。図から2つのベクトルの和 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ は、ベクトル $\mathbf{x}$ とベクトル $\mathbf{y}$ をそれぞれ一辺とする平行四辺形の対角線であることがわかる。また、2つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の差 $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ は、先のスカラーとベクトルの積の定義から $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$ と考えると、図III.5のようになることがわかる。



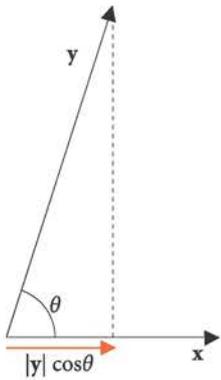
図III.3 ベクトルのスカラー倍



図III.4 ベクトルの和



図III.5 ベクトルの差



図Ⅲ.6 内積の図形的な定義

### Ⅲ.1 ベクトルの内積

次に四則演算における積に相当するものを定義する。ベクトルの積にはいくつか種類が存在するが、最も使われるのは次に定義する内積である。

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \theta \quad \text{..... (Ⅲ.2)}$$

ここで、 $\theta$ は2つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ がなす角である。またベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の間の「 $\cdot$ 」は内積を示す記号で、スカラーの計算において掛け算を示す「 $\times$ 」を書いたり、省略したりすると内積とは異なる演算になるので注意が必要である。

内積を図形的に定義すると図Ⅲ.6のようになる。

図Ⅲ.6に示すように、内積とは、一方のベクトルから他方のベクトルへ射影をおろしたとき、それらの長さの積で与えられる。

内積には以下の性質がある。

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \quad (\text{交換法則}) \quad \text{..... (Ⅲ.3)}$$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \quad (\text{分配法則}) \quad \text{..... (Ⅲ.4)}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 \quad \text{..... (Ⅲ.5)}$$

### Ⅲ.2 座標系の導入

#### Ⅲ.2.1 直交座標系

空間の一点を一意的に指定したいときは、まず基準となる点(原点)を定め、そこからの変位量を指定すればよい。その中で最も使われる方法は、直交する3つの軸を設定したxyz座標である。これを図示すると、図Ⅲ.7のようになる。

座標を導入すると、矢印で表された線分であったベクトルは、始点を原点におくことにより3数の組で表すことができる。すなわち、図Ⅲ.7のベクトルであれば

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{..... (Ⅲ.6)}$$

という具合である。 $x_1, x_2$ および $x_3$ は設定した座標系に関する $\mathbf{x}$ の成分と呼ばれる。

ベクトルの成分をxyz(直交)座標系で定義すると、ベクトルの和、スカラー倍、内積が以下のように定義される。

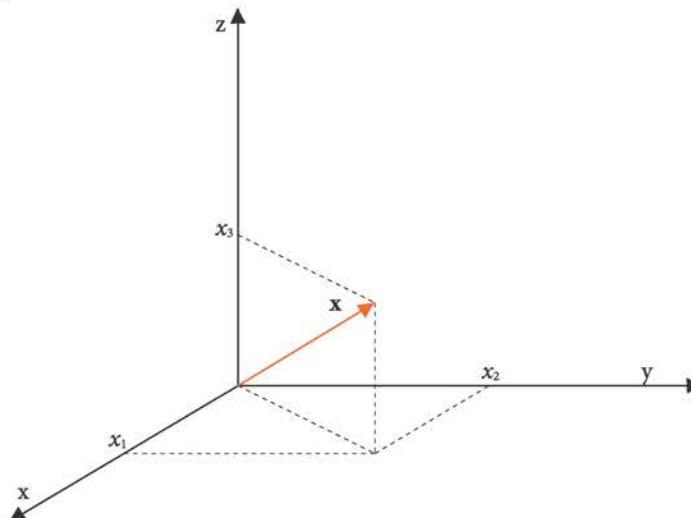
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ 、 $k$ が任意のスカラーのとき、

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \quad \text{..... (Ⅲ.7)}$$

$$k\mathbf{x} = (kx_1, kx_2, kx_3) \quad \text{..... (Ⅲ.8)}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad \text{..... (Ⅲ.9)}$$

となる。



図Ⅲ.7  $(x_1, x_2, x_3)$ 直交座標系とベクトル

ここまでの説明で、空間の代表点を指定する座標について理解できたと思う。物理では、さらに計算を簡単にするために特殊な座標系を用いることがある。それが円柱座標系と球座標系である。

### Ⅲ.2.2 円柱座標系

円柱座標系はxyz直交座標系のxy平面を極座標で表し、z軸に関しては直交座標系のものをそのまま使う座標系である。これを図示すると図Ⅲ.8のようになる。

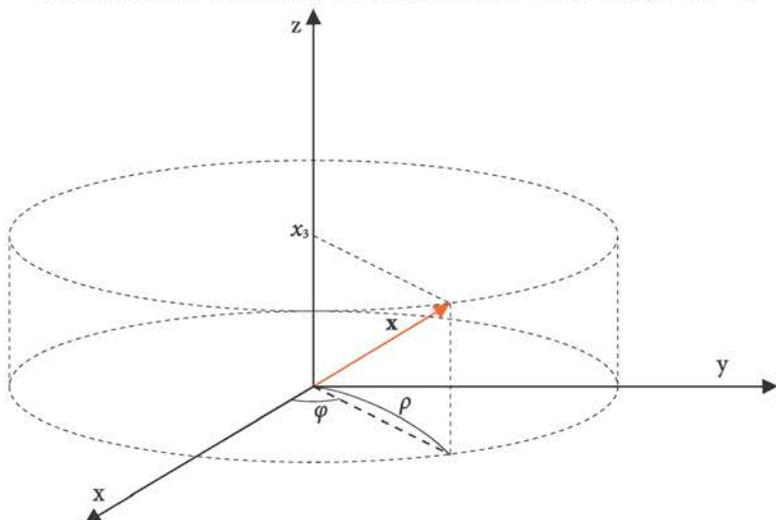
xyz直交座標系から円柱座標系への変換は次の式で定義される。

$$x_1 = \rho \cos \varphi \quad \dots \dots \dots \quad (\text{Ⅲ.10})$$

$$x_2 = \rho \sin \varphi \quad \dots \dots \dots \quad (\text{Ⅲ.11})$$

$$x_3 = x_3 \quad \dots \dots \dots \quad (\text{Ⅲ.12})$$

円柱座標はz軸に対して対称な柱状または筒状の体系の計算に向いている。



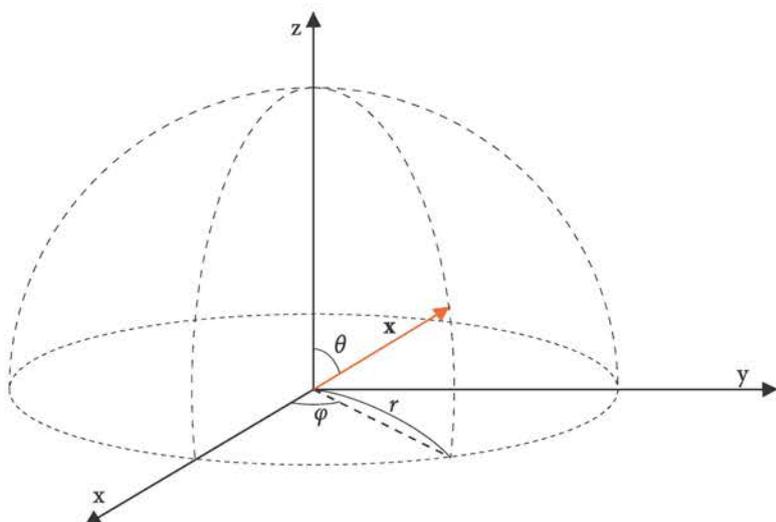
図Ⅲ.8  $(\rho, \varphi, x_3)$ 円柱座標系とベクトル

### Ⅲ.2.3 球座標系

球座標は原点からの距離 $r$ 、xyz直交座標系におけるxy平面上のx軸に対する角度 $\varphi$ 、z軸に対する角度 $\theta$ の三つをもって位置を表す。これを図示すると図Ⅲ.9のようになる。

xyz直交座標系から球座標系への変換は次の式で定義される。

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi \quad \dots \dots \dots \quad (\text{Ⅲ.13})$$



図Ⅲ.9  $(r, \theta, \varphi)$ 球座標系とベクトル

$$x_2 = r \sin\theta \sin\varphi \dots\dots\dots (III.14)$$

$$x_3 = r \cos\theta \dots\dots\dots (III.15)$$

球座標は球対称をもつ体系の計算に向いているほか、方向を示す成分 $\varphi$ 、 $\theta$ と大きさを示す成分 $r$ が独立しているため、向きと大きさの二つで表されるベクトルの直感的な理解がしやすいという特徴がある。

### III.3 原子炉物理で用いられるベクトル演算子

いままでに出てきたベクトルは向き、大きさが一定の定ベクトルであった。しかし実際に物理で扱うベクトルは、たとえば時刻 $t$ の変化に伴って向き、大きさが変化するようなベクトル関数であることが多い。関数を考える場合は、その変化を知るために微積分が重要になってくる。ここでは特に原子炉物理の分野で重要となる、ベクトル関数のいくつかの微分演算について述べる。

#### III.3.1 勾配 (gradient)

あるスカラーの関数 $\phi$ があるとき、その勾配を $\text{grad}\phi$ もしくは $\nabla\phi$ と書く。たとえばxyz直交座標系で考えるとその定義は

$$\text{grad}\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (III.16)$$

となる。

$\text{grad}$ の物理的なイメージは以下のように考えるとわかりやすい。いま、図III.10に示すような $z=f(x, y)$ という曲面を考える。

この曲面のとある一点 $(a, b, f(a, b))$ にボールを置くと、ボールはどの方向に転がるだろうか? 答えは、「もっとも勾配のきつい方向」である。これが $\text{grad}$ の物理的なイメージである。この場合、その方向は $-\text{grad} f(x, y)$ となる。

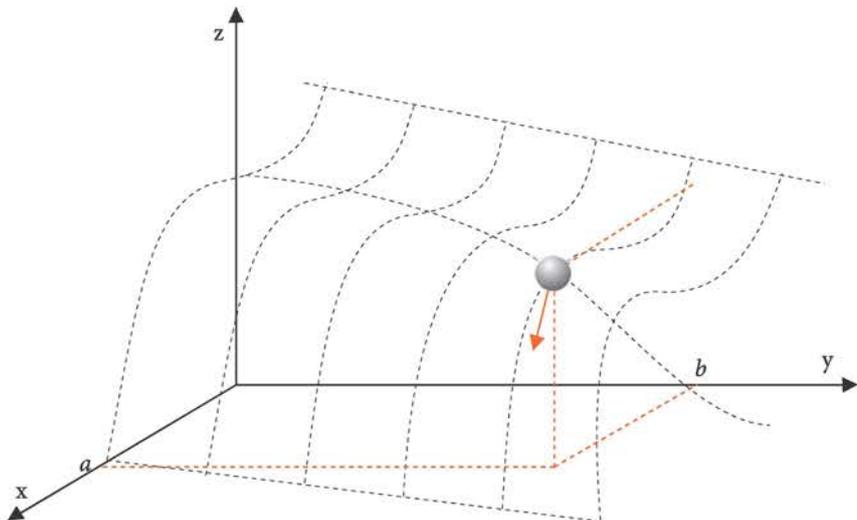
また、円柱座標系および球座標系の勾配は以下のように定義される。

$$\text{円柱座標系: } \text{grad}\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (III.17)$$

$$\text{球座標: } \text{grad}\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \right) \dots\dots\dots (III.18)$$

#### III.3.2 発散 (divergence)

次にベクトルの発散について定義する。ベクトル $\mathbf{A}$ の発散は $\text{div}\mathbf{A}$ もしくは $\nabla\cdot\mathbf{A}$ と書く。いまベクトル $\mathbf{A}$ を $\mathbf{A}=(A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$ とし、xyz座標系で考えると発散の定義は



図III.10  $\text{grad}$ のイメージ

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \dots\dots\dots (III.19)$$

となる。

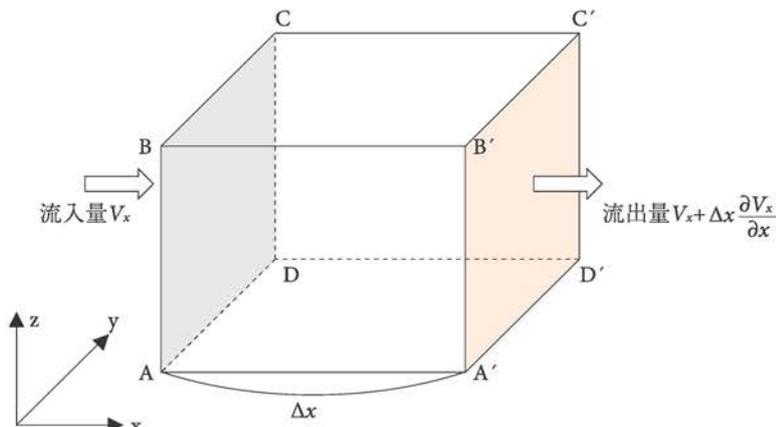
(III.16) 式で定義した勾配と (III.19) 式で定義した発散を比較すると、ともにxyz各座標で偏微分している形をしており非常に似ていることがわかる。しかし、一見似ているように見えるがこの二つの意味は大きく異なる。(III.16) 式の右辺は三つの偏微分が括弧で覆われており座標、すなわちベクトルを示している。一方、(III.19) 式の右辺は三つの偏微分の合計でありスカラー量である。また、(III.16) 式の左辺にてgradはスカラーに作用しているが、(III.19) 式の左辺にてdivはベクトルに作用している。まとめると、勾配はスカラーからベクトルを計算し、発散はベクトルからスカラーを計算するのである。

divの物理的なイメージは、直方体中を流れる流体を考えるとよい。図III.11に示す直方体領域ABCD-A'B'C'D'とそこを流れる流体を考える。もっとも簡単な場合として、図III.11の流入量と流出量が異なっていれば、(ほかの面からの流入・流出が無いものとする)、直方体領域内で流体の湧き出しもしくは吸収が存在することとなる。流入量と流出量が異なっているため、 $V_x \neq V_x + \Delta x \frac{\partial V_x}{\partial x}$  つまり、 $\Delta x \frac{\partial V_x}{\partial x}$  だけ直方体領域内で流体が湧き出しているもしくは吸収されていることになる。この点について、以下により詳しく一般的な場合について議論する。

いま、図中のA点での流入量を $V_x$ とする。すると、A'点からの流出量は $V_x$ のx方向の変化量 $\partial V_x / \partial x$ と領域のx方向の長さ $\Delta x$ の積と $V_x$ の合計で表され $V_x + \Delta x \frac{\partial V_x}{\partial x}$ となる。よって、その差は $\Delta x \frac{\partial V_x}{\partial x}$ となる。同様に、図中のD点での流入量はA'点のときと同様に考えて $V_x + \Delta y \frac{\partial V_x}{\partial y}$ となる。D'点での流出量は少し長くなるが

$$V_x + \Delta y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left( V_x + \Delta y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = V_x + \Delta y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \Delta x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (III.20)$$

となる。ここで直方体領域が十分小さければ、x方向の流れはほぼ一様と考えることができ、二次の変化量(III.20式の右辺第四項)は無視できる。したがって、DD'の差はAA'と同様に $\Delta x \frac{\partial V_x}{\partial x}$ となる。以上のこと(流出量と流入量の差の計算)はBB'とCC'でも成り立つので、ABCD面からA'B'C'D'面への流出量と流入量の差は単位面積当たり $\Delta x \frac{\partial V_x}{\partial x}$ といえる。よって、この領域のx方向の流出量と流入量の差はABCD面の面積 $\Delta y \Delta z$ を考慮して $\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial V_x}{\partial x}$ となる。同じようにy方向、z方向について考えると $\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial V_y}{\partial y}$ 、



図III.11 divのイメージ

$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial V_z}{\partial z}$  となるので、この領域の流出量と流入量の差は

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial V_x}{\partial x} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial V_y}{\partial y} + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial V_z}{\partial z} \dots\dots\dots (III.21)$$

となる。これを領域の体積  $\Delta x \Delta y \Delta z$  で割れば単位体積あたりの流出量と流入量の差となり

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \text{div} \mathbf{V} \dots\dots\dots (III.22)$$

となる。(III. 22) 式の  $\text{div} \mathbf{V}$  が 0 であるとき、単位体積あたりの流出量と流入量の差はなく、一様な流れがあるといえる。 $\text{div} \mathbf{V} > 0$  であれば、その領域内に湧き出すところがあり、 $\text{div} \mathbf{V} < 0$  であれば、領域内に吸い込むところがあるといえる。この湧き出しと吸い込みは、2次元であれば温泉の湧き出し口と排水口、3次元であれば宇宙のどこかにあるとされるホワイトホールとブラックホールのイメージで考えてもらえばよい。

また、体系が定常でなく、かつ湧き出しと吸い込みがない場合、 $\text{div} \mathbf{V} > 0$  であれば、流出量の方が流入量より大きく、その領域内の流体が「減りつつある」状態であり、逆に  $\text{div} \mathbf{V} < 0$  であれば、流出量の方が流入量より小さく、領域内の流体が「増えつつある」状態であるというようにも解釈できる。以上が発散の物理的なイメージである。

なお、円柱座標系および球座標系の発散は以下のように定義される。

$$\text{円柱座標系: } \text{div} \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \dots\dots\dots (III.23)$$

$$\text{球座標系: } \text{div} \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \dots\dots\dots (III.24)$$

### III.3.3 ラプラシアン (laplacian)

ここまででスカラーの勾配とベクトルの発散を定義した。これらはすなわち、 $\text{grad}$  はスカラー場 (スカラー分布) からベクトルを計算する、また  $\text{div}$  はベクトルからスカラーを計算するものであった。さらに、この2つを組み合わせた  $\Delta$  (ラプラシアン) を定義する。 $\Delta$  は以下の式で定義される。

$$\Delta \phi = \text{div grad} \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \dots\dots\dots (III.25)$$

ラプラシアンは、次のラプラス方程式やその変形した式などで用いられることが多く、広く物理分野で見られる。

$$\Delta \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = 0 \dots\dots\dots (III.26)$$

ラプラシアンの物理的な意味について、ラプラス方程式を変形した式を用いて考えよう。今、スカラー分布として位置  $\mathbf{x}$ 、時刻  $t$  に依存する温度分布  $T(\mathbf{x}, t)$  を考える。接している2領域の領域間を移動する熱量は、領域間の温度差が大きいほど大きくなる。要するに、非常に熱いものと冷たいものが接していれば大きな熱量の移動が起きるが、暖かいものとぬるいものが接しているならば、熱量の移動は小さくなるというわけである。これはすなわち、温度分布の熱量の移動  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  は温度分布の勾配に比例し、

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = -\kappa \text{grad} T(\mathbf{x}, t) \dots\dots\dots (III.27)$$

と定義できる。ここで  $\kappa$  は熱伝導率である。なお  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  はスカラー  $T(\mathbf{x}, t)$  の  $\text{grad}$  であるため、ベクトルであることに注意。次に、熱の流入・流出について考える。先の定義で、とある単位体積の領域への流出量と流入量の差は発散 ( $\text{div}$ ) で定義される。これより、単位体積の領域にて増加する正味の熱量は

$$-\text{div} \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = -\text{div} (-\kappa \text{grad} T(\mathbf{x}, t)) = \text{div} (\kappa \text{grad} T(\mathbf{x}, t)) \dots\dots\dots (III.28)$$

と定義できる。正味の熱量が変化するということは、その領域の温度が変化したとい

うことである。したがって、温度変化 $\partial T(\mathbf{x},t)/\partial t$ は熱容量 $c$ を用いて、

$$c \frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \text{div}(\kappa \text{grad}T(\mathbf{x},t)) \quad \text{.....} \quad (\text{III.29})$$

となる。 $c, \kappa$ が位置、時間に依存しないのであれば、上式は

$$\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{c} \text{div} \text{grad}T(\mathbf{x},t) = \frac{\kappa}{c} \nabla \cdot \nabla T(\mathbf{x},t) = \frac{\kappa}{c} \Delta T(\mathbf{x},t) \quad \text{.....} \quad (\text{III.30})$$

となる。この式は熱伝導方程式と呼ばれる拡散方程式の一つで、さまざまな分野に現れる重要な方程式である。このようにラプラシアンは、あるスカラー分布の勾配で定義されるベクトル分布の流入・流出を与えるもので、物理的には、たとえば温度や濃度などの拡散現象を記述するのに使われる。また、炉物理においては、物質中における中性子の拡散を記述するために用いられる。

なお、円柱座標系および球座標系のラプラシアンは以下のように定義される。

$$\text{円柱座標系: } \Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad \text{.....} \quad (\text{III.31})$$

$$\text{球座標系: } \Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \quad (\text{III.32})$$

### IV. ガウスの発散定理 (Gauss divergence theorem)

ベクトル場におけるガウスの発散定理とは、「ある閉じた空間全体にわたってベクトルの発散を積分した値が、その閉空間の表面全体にわたってベクトルの法線成分を積分した値と等しくなる。」ということであり、次式のように表せる。

$$\iiint_V \text{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad \dots\dots\dots (IV.1)$$

ここで、 $\mathbf{F}$ は閉空間内の任意のベクトル、 $\mathbf{n}$ は体積 $V$ の表面 $S$ の外向き単位法線ベクトルである。

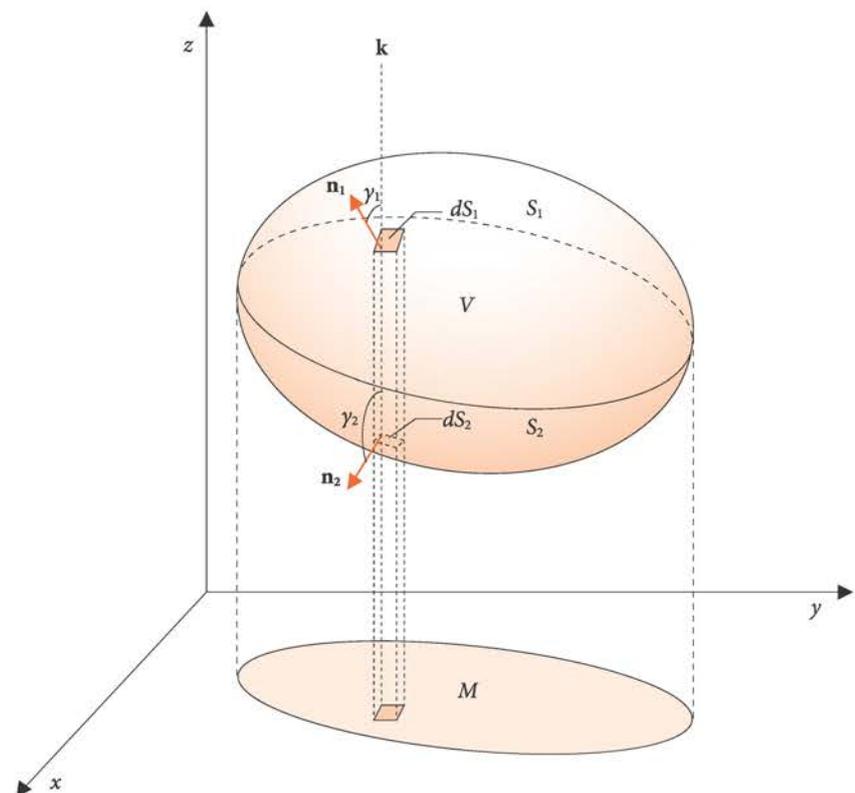
このガウスの発散定理は、物理的にどのようなことを意味しているのか。体積変化のない流体の例を用いて説明するとイメージしやすいだろう。 $\mathbf{v}$ を流体の速度ベクトルとすると、 $\text{div} \mathbf{v}$ は (Appendix III.3.2より) 単位体積、単位時間当たりの湧き出し量を表すので、(IV.1) 式の左辺は単位時間あたりに閉空間から湧き出す流体の量の合計であることがわかる。一方、(IV.1) 式の右辺は単位時間に曲面を通過して外部に出る量を表している。つまり、定常状態では「閉空間内から湧き出す量と閉空間表面を通過する量は等しい。」ということをも主張しているのが、発散定理である。

図IV.1のような直交座標系 $(x,y,z)$ を用いることで、(IV.1) 式は容易に証明できる。この直交座標系に閉空間 $V$ があるとすると、この閉空間は閉曲面 $S$ に囲まれているとし、また、この閉曲面 $S$ は上下2つの曲面、 $S_1$ と $S_2$ からできているものとする。 $xy$ 平面上への閉空間 $V$ の正射影を $M$ とし、 $S_1$ 、 $S_2$ をそれぞれ

$$\begin{cases} S_1: z=f(x,y) \\ S_2: z=g(x,y) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (IV.2)$$

とする。閉空間内の任意のベクトル $\mathbf{F}(F_1, F_2, F_3)$ を定義して、 $\frac{\partial F_3}{\partial z}$ の閉空間 $V$ での積分を考えると、

$$\iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dV = \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz \quad \dots\dots\dots (IV.3)$$



図IV.1 直交座標系における閉空間  $V$  と正射影  $M$

となる。ところで、閉空間 $V$ というのは、「正射影 $M$ から $S_1$ までの領域」から「正射影 $M$ から $S_2$ までの領域」を差し引いた領域にほかならないので、(IV.3)式は変形できて

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz &= \iint_M \int_g^f \left( \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \iint_M [F_3]_g^f dx dy \quad \dots\dots\dots (IV.4) \\ &= \iint_M F_3(x, y, f) dx dy - \iint_M F_3(x, y, g) dx dy \end{aligned}$$

となる。

ここで、閉曲面の上の部分 $S_1$ について、 $S_1$ 曲面に対する単位法線ベクトル $\mathbf{n}_1$ と $z$ 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{k}$ とのなす角は $\gamma_1$ であるとすると、

$$dx dy = \cos \gamma_1 dS_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 \quad \dots\dots\dots (IV.5)$$

となる。同様に、閉曲面の下の部分 $S_2$ について、 $S_2$ 曲面に対する単位法線ベクトル $\mathbf{n}_2$ と $z$ 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{k}$ とのなす角は $\gamma_2$ であるとすると、

$$dx dy = \cos \gamma_2 dS_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 \quad \dots\dots\dots (IV.6)$$

となる。このことから、(IV.4)式は

$$\begin{aligned} \iint_M F_3(x, y, f) dx dy - \iint_M F_3(x, y, g) dx dy &= \iint_{S_1} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \quad \dots (IV.7) \\ &= \iint_S F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

となる。 $xz$ 平面、 $yz$ 平面も同様に、

$$\iiint_V \frac{\partial F_1}{\partial x} dV = \iint_S F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \quad \dots\dots\dots (IV.8)$$

$$\iiint_V \frac{\partial F_2}{\partial y} dV = \iint_S F_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad \dots\dots\dots (IV.9)$$

となる。ここで $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ はそれぞれ $x$ 軸、 $y$ 軸方向の単位ベクトルである。(IV.7)式から(IV.9)式までを足し合わせると(IV.1)式になり、ガウスの発散定理は証明された。

## V. 一階および二階の常微分方程式の解法

### V.1 一階常微分方程式

微分方程式とは、方程式の中に微分項、つまり導関数が入っている方程式である。ここでは (V.1) 式のような一階線形微分方程式の解法を示す。 $f(t)$ が求めるべき未知関数であり、 $a$ は定数、 $Q(t)$ は既知の連続関数である。

$$\frac{d}{dt}f(t) + af(t) = Q(t) \dots\dots\dots (V.1)$$

ここでは、(V.1) 式の右辺 $Q(t)$ が、① $Q(t)=0$ の場合、② $Q(t)=$ (一定)の場合および③ $Q(t)=$ (任意の連続関数)の場合の3パターンについての解法を紹介する。

#### ① $Q(t)=0$ の場合

このとき、(V.1) 式は (V.2) 式ようになる。このような形の微分方程式は、一般的に斉次形と呼ばれる。

$$\frac{d}{dt}f(t) + af(t) = 0 \dots\dots\dots (V.2)$$

(V.2) 式を満たす任意関数は、 $f(t)=Ce^{-at}$ である。 $C$ は未定定数である。

$$f(t) = Ce^{-at} \dots\dots\dots (V.3)$$

#### ② $Q(t)=$ (一定)の場合

(V.1) 式の右辺が一定値 $A$ である場合、すなわち $Q(t)=A$ となる場合、(V.1) 式は (V.4) 式のように表される。このような形の微分方程式、すなわち $Q(t)$ が零でないものは一般的に非斉次形と呼ばれる。

$$\frac{d}{dt}f(t) + af(t) = A \dots\dots\dots (V.4)$$

ここで (V.4) 式の解が、(V.2) 式を解いた場合と同様に、 $f(t)=Ce^{-at}$ といった形で表せると仮定する。ただし、前項で未定定数として扱った $C$ は $t$ に関わる任意の関数 $C(t)$ であり、 $f(t)=C(t)e^{-at}$ とする(これを「未定定数法」という)。 $f(t)=C(t)e^{-at}$ を (V.4) 式に代入すると (V.5) 式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{C(t)e^{-at}\} + a\{C(t)e^{-at}\} &= A \\ C'(t)e^{-at} - aC(t)e^{-at} + a\{C(t)e^{-at}\} &= A \\ C'(t)e^{-at} &= A \end{aligned}$$

よって

$$C'(t) = Ae^{at} \dots\dots\dots (V.5)$$

(V.5) 式は単純な一階微分だから $C(t)$ が決定される。

$$C(t) = \frac{A}{a}e^{at} + C \dots\dots\dots (V.6)$$

よって、 $f(t)$ は (V.7) 式となる。

$$f(t) = C(t)e^{-at} = Ce^{-at} + \frac{A}{a} \dots\dots\dots (V.7)$$

#### ③ $Q(t)=$ 任意の場合

最後に $Q(t)=$ 任意の場合、つまりどのような $Q(t)$ でも適用可能な解法を紹介する。まず、(V.1) 式の両辺に $e^{at}$ をかける。これで左辺を $e^{at}f(t)$ の一階微分の形で表現することができる。

$$e^{at} \frac{d}{dt}f(t) + e^{at}af(t) = e^{at}Q(t)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{at}f(t)) = e^{at}Q(t) \dots\dots\dots (V.8)$$

(V.8) 式の両辺を  $t$  で積分すると、(V.9) 式を得る。

$$e^{at}f(t) = \int e^{at}Q(t)dt + C \dots\dots\dots (V.9)$$

(V.9) 式より  $f(t)$  は (V.10) 式となる。

$$f(t) = e^{-at} \left( \int e^{at}Q(t)dt + C \right) \dots\dots\dots (V.10)$$

$Q(t)=0$  の場合、(V.3) 式に、 $Q(t)=A$  の場合、(V.7) 式になる。

## V.2 二階常微分方程式

ここでは、原子炉物理でよく扱われる、(V.11) 式のような二階線形微分方程式の解法を示す。一階の微分項が入っていないことに注意。

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) + af(t) = Q(t) \dots\dots\dots (V.11)$$

一階常微分方程式の際と同様に、①  $Q(t)=0$  の場合、②  $Q(t)=(\text{一定})$  の場合および③  $Q(t)=(\text{任意})$  の場合の3パターンについての解法を紹介する。

### ① $Q(t)=0$ の場合

(V.11) 式の右辺が0の場合の解法を考える。

$$\frac{d^2}{dx^2} f(t) + af(t) = 0 \dots\dots\dots (V.12)$$

まず、 $f(t)$  は  $e^t$  を用いて表すことができる関数、すなわち  $f(t) = Ce^{\lambda t}$  であると仮定する。 $\lambda$  は任意の定数である。この仮定のもと、 $f(t) = Ce^{\lambda t}$  を (V.12) に代入する。すると、 $\lambda$  だけの方程式を得る。

$$\begin{aligned} \lambda^2 Ce^{\lambda t} + aCe^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda^2 + a &= 0 \dots\dots\dots (V.13) \end{aligned}$$

(V.13) 式より、 $\lambda$  が決定される。

$$\lambda_1 = \sqrt{-a}, \lambda_2 = -\sqrt{-a} \dots\dots\dots (V.14)$$

(V.14) 式より (V.12) 式の解は  $f_1(t)$  および  $f_2(t)$  となる。 $C_1, C_2$  は未定定数である。

$$f_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, f_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \dots\dots\dots (V.15)$$

$f_1(t)$  および  $f_2(t)$  は共に (V.12) 式の解であるから、 $f_1(t), f_2(t)$  を線形結合させたものも微分方程式の解となる。

$$f(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \dots\dots\dots (V.16)$$

(V.16) 式は (V.12) 式に対する一般解と呼ばれる。これは  $f_1(t)$  および  $f_2(t)$  の両方を含んでおり、(V.12) 式を常に満たすことができる解である。よって、(V.16) 式が、求めるべき (V.12) 式の解となる。

なお、 $a$  が正の場合、

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1} &= e^{\sqrt{-a}} = e^{i\sqrt{a}} = \cos\sqrt{a} + i\sin\sqrt{a} \\ e^{\lambda_2} &= e^{-\sqrt{-a}} = e^{-i\sqrt{a}} = \cos\sqrt{a} - i\sin\sqrt{a} \end{aligned}$$

を考慮すると、 $f(t) = C_1 \cos\sqrt{a} + C_2 \sin\sqrt{a}$  と書くことができる ( $C_1, C_2$  は V.16 式の  $C_1, C_2$  とは異なる値になることに注意)。

第4章で述べた固定中性子源を考慮した拡散方程式では、 $a$  は負の値であり、中性子束は (V.16) 式の形、つまり、指数関数 (若しくは Appendix VI で述べる双曲線関数) を用いて与えられる。一方、第5章で述べた核分裂中性子源を考慮した拡散方

程式では、一般的に $a$ は正の値となり、中性子束は、上記のように三角関数で与えられる。なお、核分裂を考慮した拡散方程式でも、核分裂中性子源 ( $\nu\Sigma_f\phi/k$ ) が吸収量 ( $\Sigma_a\phi$ ) より小さければ、 $a$ の値は負となり、中性子束は指数関数 (若しくは双曲線関数) で与えられる。このようなケースは、多領域の原子炉において、特定の領域の無限増倍率が原子炉全体の実効増倍率より小さい場合に発生する。すなわち、 $\nu\Sigma_f\phi/k < \Sigma_a\phi$ より、 $\nu\Sigma_f\phi/\Sigma_a\phi = k_{\infty} < k$ のとき、このような状態になる。

②  $Q(t) = (\text{一定})$  の場合

(V.11) 式の右辺が一定値 $A$ である場合、(V.11) 式は (V.17) 式で表される。

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) + af(t) = A \dots\dots\dots (V.17)$$

非斉次形の一般解は、斉次形の一般解  $f_h(t)$  と非斉次形の特解  $f_p(t)$  の線形結合、 $f(t) = f_h(t) + f_p(t)$  で表される。斉次形の一般解  $f_h(t)$  は、すでに①で求めたので、ここでは特解  $f_p(t)$  の求め方を示す。

特解を求める際は、一般には定数変化法を用いる。特解を  $f_p(t) = C(t)e^{\lambda_1 t}$  と仮定する。ただし、 $\lambda_1$  は (V.14) 式のものである。ここでは  $\lambda_1$  を用いて特解を仮定しているが、 $\lambda_2$  を用いてもかまわない。 $f_p(t) = C(t)e^{\lambda_1 t}$  を (V.17) 式に代入して整理する。

$$C''(t)e^{\lambda_1 t} + 2\lambda_1 C'(t)e^{\lambda_1 t} + \lambda_1^2 C(t)e^{\lambda_1 t} + aC(t)e^{\lambda_1 t} = A$$

$$C''(t) + 2\lambda_1 C'(t) + C(t)(\lambda_1^2 + a) = Ae^{-\lambda_1 t} \dots\dots\dots (V.18)$$

(V.14) 式より、 $\lambda_1^2 + a = 0$  であるため、(V.18) 式は

$$C''(t) + 2\lambda_1 C'(t) = Ae^{-\lambda_1 t} \dots\dots\dots (V.19)$$

となる。

$C'(t) = B(t)$  とおくと、(V.19) 式は  $B(t)$  に関する一階の常微分方程式となり、 $C(t)$  を決定することができる。

$$B'(t) + 2\lambda_1 B(t) = Ae^{-\lambda_1 t}$$

これより

$$B(t) = -\frac{A}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t}$$

$B(t) = C'(t)$  より

$$C'(t) = -\frac{A}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t}$$

したがって  $\lambda_1^2 = -a$  を用いると、

$$C(t) = \frac{A}{\lambda_1^2} e^{-\lambda_1 t} = -\frac{A}{a} e^{-\lambda_1 t} \dots\dots\dots (V.20)$$

よって特解  $f_p(t)$  は (V.21) 式となる。

$$f_p(t) = -\frac{A}{a} e^{-\lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} = -\frac{A}{a} \dots\dots\dots (V.21)$$

以上より、(V.17) 式に対する一般解は (V.16) 式を用いて、

$$f(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{A}{a} \dots\dots\dots (V.22)$$

となる。

③  $Q(t) = (\text{任意})$  の場合 (注V.1)

$Q(t)$  が一定ではなく、任意である場合の特解の導出法を示す。特解を  $f_p(t) = C(t)e^{\lambda_1 t}$  と仮定し、定数変化法を用いて求める。 $Q(t) = (\text{一定})$  の場合と同様に

注V.1: 原子炉の炉心計算によく用いられる近代ノード法では、 $Q(t)$ を2次の多項式で近似することが良く行われる。たとえば、 $Q(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$  とすると、一般解は、 $f(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{\alpha}{a} t^2 + \frac{\beta}{a} t + \frac{a\gamma - 2\alpha}{a^2}$  で与えられる。

$f_p(t) = C(t)e^{\lambda_1 t}$ を (V.11) 式に代入して整理すると (V.23) 式を得る。

$$C''(t) + C'(t)(2\lambda_1) = Q(t)e^{-\lambda_1 t} \dots\dots\dots (V.23)$$

$C'(t) = B(t)$ とおくと、(V.23) 式は $B(t)$ に関する一階の常微分方程式となり、V.1③で扱った微分方程式と同じ形になるため、(V.10) 式を利用して特解を決定することができる。

$$f_p(t) = C(t)e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t} \int B(t) dt \dots\dots\dots (V.24)$$

以上より一般解は以下の式で表される。

$$f(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_1 t} \int B(t) dt \dots\dots\dots (V.25)$$

### VI. 双曲線関数 (Hyperbolic function)

微分方程式 (VI.1) 式の解は $\sin(x)$ 、 $\cos(x)$ である。

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = -f(x) \dots\dots\dots (VI.1)$$

一方、(VI.2) 式の解は $e^x$ 、 $e^{-x}$ である。

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = f(x) \dots\dots\dots (VI.2)$$

(VI.1) 式および (VI.2) 式は、右辺の係数が異なるだけであるため、両者の解を同じように扱うことができれば便利である。そこで、(VI.2) 式の解である $e^x$ 、 $e^{-x}$ を利用して双曲線関数を下記のように定義する。

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \dots\dots\dots (VI.3)$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \dots\dots\dots (VI.4)$$

また、(VI.3) 式および (VI.4) 式を利用して、

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \dots\dots\dots (VI.5)$$

(VI.3) 式～ (VI.5) 式的双曲線関数を図VI.1に示す。

なお、 $\cosh(x)$ が描く曲線を懸垂線と言ひ、ひもの両端を固定し、つるしたときに見える曲線を表すときに使用される。

また図VI.1より、 $\sinh(x)$ は奇関数で値域は $(-\infty, \infty)$ となり、 $\cosh(x)$ は偶関数で値域は $[1, \infty)$ となることがわかる。また、 $\tanh$ は奇関数で値域は $(-1, 1)$ である。

双曲線関数を (VI.3) ～ (VI.5) 式のように書き表す利点について述べる。

(VI.2) 式の一般解は

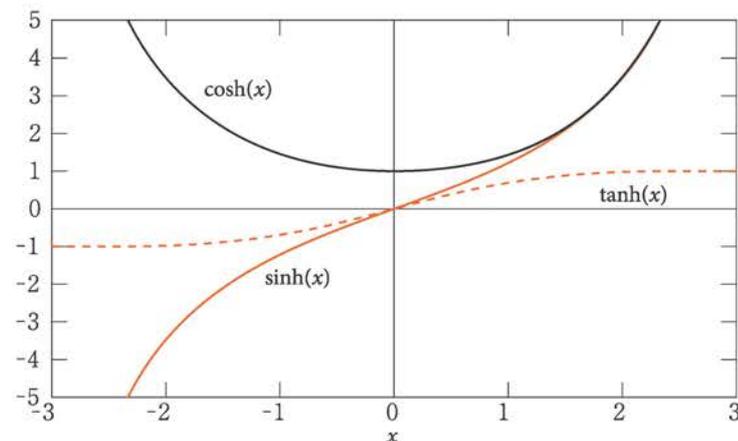
$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \dots\dots\dots (VI.6)$$

となる。しかし上記の双曲線関数を用いることによって、

$$f(x) = C'_1 \cosh(x) + C'_2 \sinh(x) \dots\dots\dots (VI.7)$$

と書くこともできる。

ここで、 $f(x)$ が奇関数や偶関数であることが既知であるとする。(VI.6) 式の場合では境界条件などを用ひ、 $f(x)$ を求める際に2つの未定定数 $C_1$ 、 $C_2$ を求める必要がある。しかし (VI.7) 式の場合、 $f(x)$ が奇関数ならば $\sinh(x)$ のみの項で表すことができ、また



図VI.1 双曲線関数

$f(x)$ が偶関数ならば、 $\cosh(x)$ のみの項で表すことができる。このように、対象とする関数によっては、(VI.7)式の方が $f(x)$ をより簡単に求めることができる。

最後に双曲線関数の性質について述べる。

双曲線関数には以下の加法定理が成り立つ。

$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh(\alpha)\cosh(\beta) \pm \cosh(\alpha)\sinh(\beta) \quad \text{..... (VI.8)}$$

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh(\alpha)\cosh(\beta) \pm \sinh(\alpha)\sinh(\beta) \quad \text{..... (VI.9)}$$

このように、双曲線関数には三角関数と似た性質がある。また変数を複素数まで拡張すれば、

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x) \quad \text{..... (VI.10)}$$

$$\sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \sin(x) \quad \text{..... (VI.11)}$$

となる。

また、導関数は

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x) \quad \text{..... (VI.12)}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x) \quad \text{..... (VI.13)}$$

となるので、 $\cosh(x)$ 、 $\sinh(x)$ は前述のようにいずれも二階微分方程式

$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = f(x)$ の解であり、この微分方程式の基本解のひとつとなる。なお、

$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \quad \text{..... (VI.14)}$$

である。

同様に積分に関しても、

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C \quad \text{..... (VI.15)}$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C \quad \text{..... (VI.16)}$$

$$\int \tanh(x) dx = \ln|\cosh(x)| + C \quad \text{..... (VI.17)}$$

となる。また $e^x$ 、 $e^{-x}$ は(VI.3)、(VI.4)式よりそれぞれ

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x) \quad \text{..... (VI.18)}$$

$$e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x) \quad \text{..... (VI.19)}$$

となる。

### VII. ルジャンドル関数 (Legendre functions)

ルジャンドル関数は、特殊関数の一種であり、フーリエ級数などと同じように関数の級数展開に用いられる。

まず、ルジャンドル微分方程式について説明する。 $n$ を任意の実数とする次式の微分方程式をルジャンドル微分方程式といい、これを満たす解をルジャンドル関数という。

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \dots\dots\dots (VII.1)$$

この微分方程式は、球座標系  $(r, \theta, \varphi)$  において  $\varphi$  が独立なとき、つまり  $u=R(r)\Theta(\theta)$  と書ける場合のラプラス方程式  $\nabla^2 u(r, \theta)=0$  などから得られる。 $n=0, 1, 2, 3, \dots$  (0以上の整数) のとき、(VII.1) 式の一般解は多項式で (VII.2) 式のように与えられるとする。

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \dots\dots\dots (VII.2)$$

(VII.2) 式を (VII.1) 式に代入し  $C_{m+2}$  と  $C_m$  の漸化式を導き、 $C_0=1, C_1=0$  あるいは  $C_0=0, C_1=1$  という条件を与えることで (VII.3) 式を導き出せる。前者の条件の下で得られる解を、第1種のルジャンドル関数あるいはルジャンドル多項式 (Legendre polynomials) といい、 $P_n(x)$  と表記する。一方、後者の条件の下で得られる解を、第2種のルジャンドル関数 (Legendre function of the second kind) といい、 $Q_n(x)$  と表記する。このとき、 $P_n(x)$  と  $Q_n(x)$  は、それぞれ独立した解であり、(VII.1) 式の一般解は次のように与えられる。

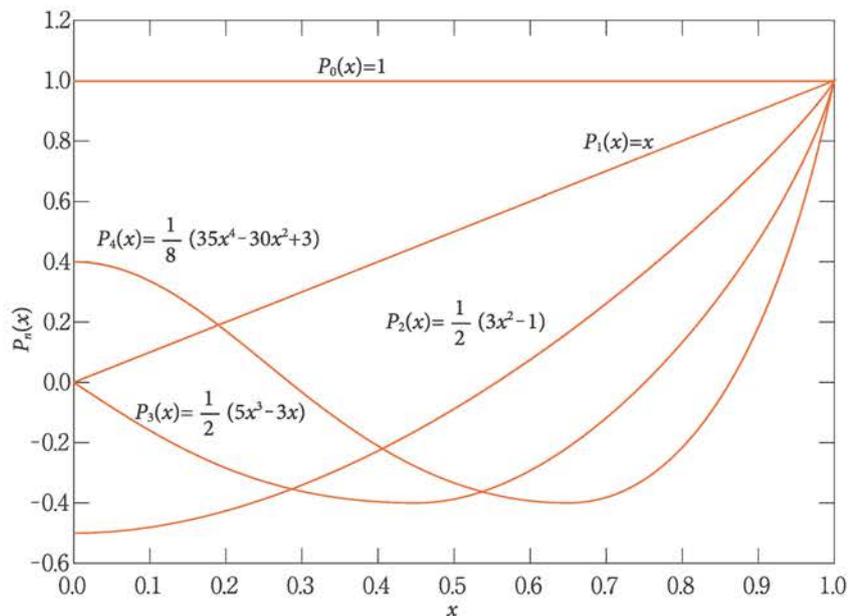
$$y_n(x)=D_1P_n(x)+D_2Q_n(x) \dots\dots\dots (VII.3)$$

ここで  $D_1, D_2$  は任意の定数である。  
特に重要なのがルジャンドル多項式  $P_n(x)$  であり、次の式で表される。

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^n} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right\} \dots (VII.4)$$

なお、(VII.4) 式は0以上の全ての整数  $n$  に対し、 $P_n(1)=1, P_n(-1)=(-1)^n$  を満たしている。ここで、低次のルジャンドル関数の例をあげる。図VII.1は、以下に示す4次までのルジャンドル多項式を図示したものである。

$$P_0(x) = \frac{(2 \cdot 0)!}{(0!)^2 \cdot 2^0} \{ x^0 \} = 1 \dots\dots\dots (VII.5)$$



図VII.1 4次までのルジャンドル多項式の例

$$P_1(x) = \frac{(2 \cdot 1)!}{(1!)^2 \cdot 2^1} \{x^1\} = x \quad \text{..... (VII.6)}$$

$$P_2(x) = \frac{(2 \cdot 2)!}{(2!)^2 \cdot 2^2} \left\{ x^2 - \frac{2(2-1)}{2(2 \cdot 2 - 1)} x^{2-2} \right\} = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \quad \text{..... (VII.7)}$$

$$P_3(x) = \frac{(2 \cdot 3)!}{(3!)^2 \cdot 2^3} \left\{ x^3 - \frac{3(3-1)}{2(2 \cdot 3 - 1)} x \right\} = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \quad \text{..... (VII.8)}$$

$$P_4(x) = \frac{(2 \cdot 4)!}{(4!)^2 \cdot 2^4} \left\{ x^4 - \frac{4(4-1)}{2(2 \cdot 4 - 1)} x^2 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{2 \cdot 4(2 \cdot 4 - 1)(2 \cdot 4 - 3)} \right\} \quad \text{..... (VII.9)}$$

$$= \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

ところで、(VII.4) 式は一般的に次のような関係を満たす。

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{..... (VII.10)}$$

これをロドリゲスの公式という。また、ルジャンドル多項式は次のような性質を持っている。

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{2}{2n+1} & (m = n) \end{cases} \quad \text{..... (VII.11)}$$

つまり (VII.11) 式は、ルジャンドル多項式  $P_n$  が直交していることを示している。

ルジャンドル多項式の利用について説明する。ここで  $A_k$  は係数とする。関数  $f(x)$  が  $-1 < x < 1$  で連続の場合、(VII.12) 式のように、ある関数  $f(x)$  をルジャンドル多項式の足し合わせで近似することができる。

$$f(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + A_2 P_2(x) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x) \quad \text{..... (VII.12)}$$

この性質は、フーリエ級数と同じように関数の級数展開に用いられる。この級数展開の例を示す。(VII.13) 式のように  $e^x$  をルジャンドル多項式を用いて展開することを考える。

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x) \quad \text{..... (VII.13)}$$

となる。このときの係数  $A_k$  について考える。両辺に  $P_l(x)$  ( $l=0,1,2,3,\dots$ ) を掛け、 $-1 \sim 1$  の領域で積分する。

$$\int_{-1}^1 P_l(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-1}^1 A_k P_l(x) P_k(x) dx \quad \text{..... (VII.14)}$$

ここで、ルジャンドル多項式の直交性 (VII.11) 式より  $k \neq l$  ならば右辺は 0 となる。よって  $k=l$  のみが残る、(VII.11) 式より (VII.14) 式は、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{-1}^1 P_l(x) f(x) dx = A_l \int_{-1}^1 P_l(x) P_l(x) dx = A_l \frac{2}{2 \cdot l + 1} \quad \text{..... (VII.15)}$$

となる。 $A_l$  について書き直すと

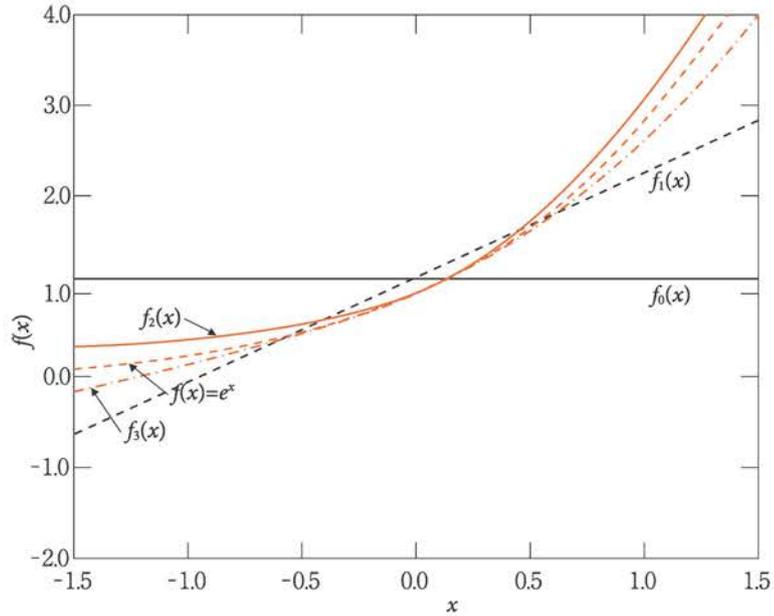
$$A_l = \frac{2 \cdot l + 1}{2} \int_{-1}^1 P_l(x) f(x) dx = \frac{2 \cdot l + 1}{2} \int_{-1}^1 P_l(x) \cdot e^x dx \quad \text{..... (VII.16)}$$

となる。(VII.16) を用いると、 $l=3$  までの係数は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{2 \cdot 0 + 1}{2} \int_{-1}^1 P_0(x) f(x) dx = \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right) \\
 A_1 &= \frac{2 \cdot 1 + 1}{2} \int_{-1}^1 P_1(x) f(x) dx = \frac{3}{e} \\
 A_2 &= \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} \int_{-1}^1 P_2(x) f(x) dx = \frac{5}{2} \left( -\frac{7}{e} + e \right) \dots\dots\dots (VII.17) \\
 A_3 &= \frac{2 \cdot 3 + 1}{2} \int_{-1}^1 P_3(x) f(x) dx = \frac{7}{2} \left( \frac{37}{e} - 5e \right)
 \end{aligned}$$

以上を用いて (VII.13) 式の3次までの展開  $f_0(x) \sim f_3(x)$  を図示すると、図VII.2のようになる。

図VII.2からもわかるように、ルジャンドル多項式を用いた級数展開は変化が大きくない (激しくない) 関数に対しては低次でも比較的、良い近似を与える。この性質を用いて、原子炉物理では、中性子束の角度分布を級数展開する際に用いられている。



図VII.2 ルジャンドル多項式を用いた級数展開

### VIII. ベッセル関数 (Bessel functions)

第5章で示したように、無限円柱体系における原子炉方程式は以下のように与えられる。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\phi}{dr} + B^2 \phi = 0 \quad \text{..... (VIII.1)}$$

(VIII.1) 式は、以下のように展開することができる。

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + B^2 \phi = 0 \quad \text{..... (VIII.2)}$$

(VIII.2) 式は、(VIII.3) 式に示すベッセル微分方程式の特殊なケース ( $n=0$ ) である。

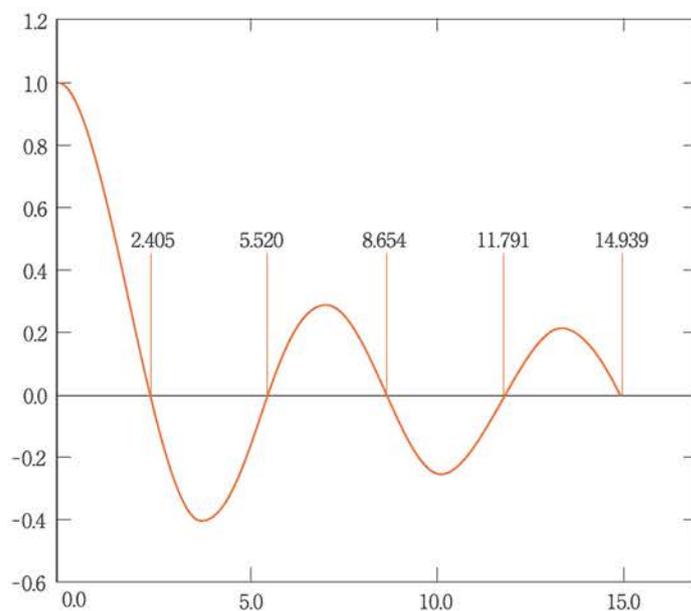
$$\phi'' + \frac{1}{r} \phi' + \left( B^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \phi = 0 \quad \text{..... (VIII.3)}$$

ベッセル微分方程式の解をベッセル関数と呼ぶ。ラプラス方程式またはヘルムホルツ方程式を円柱座標系で表したものは、ベッセル微分方程式の特殊なケース ( $n=0$ ) に該当する。よって、ベッセル関数は、電波の伝搬や静電位差などの解を求めるときに重要なものとなる。また、原子炉物理においては、上述のように円柱座標系における原子炉方程式を解く際に現れる。

ベッセルの微分方程式の一般解は、以下のように与えられる。

$$\phi = AJ_n(Br) + CY_n(Br) \quad \text{..... (VIII.4)}$$

ここで、A、Cは定数であり、 $J_n(Br)$ 、 $Y_n(Br)$ はそれぞれ第一種および第二種のベッセル関数と呼ばれる。 $J_0(r)$ について具体的な形を図VIII.1に示す。



図VIII.1 ベッセル関数  $J_0(r)$

### IX. ラプラス変換 (Laplace Transformation)

ラプラス変換の定義式は

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \dots\dots\dots (IX.1)$$

であり、関数  $\mathcal{L}[f(t)](s)$  を  $f(t)$  のラプラス変換という。また、関数  $f(t)$  を原関数、複素関数  $\mathcal{L}[f(t)](s)$  を像関数と呼ぶ。ここで、 $s$  は複素数である。(IX.1) 式は、付録 X で示すフーリエ変換の (X.1) 式と似ていることから、ラプラス変換は、フーリエ変換の複素数版のようなものと考えられることができる。しかし、本質的には、ラプラス変換は、数学的には微分演算子<sup>(IX.1)</sup>の一種であり、フーリエ変換とは違う。

IX.1: 演算子とは、関数やベクトルから別の関数やベクトルを作り出す働きをするものを言う。単に定数をかけるのも演算子の一種である。たとえば、微分をする、積分をする、平行移動する、回転するなどは、すべて演算子と行うことができる。微分をするという演算子を微分演算子と言う。

ラプラス変換を使った演算法は、初期条件が与えられた場合の非同次線形微分方程式を解くときに威力を発揮する。

Appendix V で示したように通常の微分方程式の解法では、一般解と特解の和を取り、初期条件から任意定数を決める必要があったが、演算法では一気に解が求まる。すなわち、ラプラス変換は、微分方程式を簡単に解くための手法で、微分を  $s$ 、積分を  $1/s$  と置くことで、言うならば中学校で学んだ方程式と同じ要領で微分方程式を解けるという、非常にありがたい手法である。

しかし、コンピュータの発達した現在、初期条件を与えられた微分方程式は、数値計算により簡単に解くことができるので、複雑な微分方程式をラプラス変換と演算法のテクニックで解く必要性は昔に比べて小さくなっていると考えられる。それでもなお、原子炉物理では、動特性や制御において、このラプラス変換を多く利用している。

以下に、いくつかの簡単な関数のラプラス変換を示す (表 IX.1)。

ここで、ラプラス変換が、微分方程式で威力を発揮するかどうか、以下の動特性方程式に当てはめて、試してみる。

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda C(t) \dots\dots\dots (IX.2)$$

表 IX.1 関数のラプラス変換の例

もとの関数	変換後の関数
$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$
$\frac{df(t)}{dt}$	$s \mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 \mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0)$
$k$	$\frac{k}{s}$
$kf(t)$	$k \mathcal{L}[f(t)](s)$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$
$\delta(t - a)$	$e^{-as}$
$\delta(t) - ae^{-at}$	$\frac{1}{s + a}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s + a)}$
$\frac{1}{b-a}e^{-at} + \frac{1}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{1}{(s + a)(s + b)}$
$\frac{a_1 - a}{b - a}e^{-at} + \frac{a_1 - b}{a - b}e^{-bt}$	$\frac{s + a_1}{(s + a)(s + b)}$

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} = \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda C(t) \quad \text{..... (IX.3)}$$

$n(t)$ および $C(t)$ のラプラス変換を、それぞれ $\mathcal{Q}[n(t)]$ 、 $\mathcal{Q}[C(t)]$  とすると、(IX.2) 式及び (IX.3) 式のラプラス変換は、次のようになる。

$$s\mathcal{Q}[n(t)] - n(0) = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} \mathcal{Q}[n(t)] + \lambda \mathcal{Q}[C(t)] \quad \text{..... (IX.4)}$$

$$s\mathcal{Q}[C(t)] - C(0) = \frac{\beta}{\Lambda} \mathcal{Q}[n(t)] - \lambda \mathcal{Q}[C(t)] \quad \text{..... (IX.5)}$$

(IX.5) 式において、 $\mathcal{Q}[C(t)]$  について整理すると

$$\mathcal{Q}[C(t)] = \frac{1}{(s+\lambda)} \frac{\beta}{\Lambda} \mathcal{Q}[n(t)] + \frac{1}{(s+\lambda)} C(0) \quad \text{..... (IX.6)}$$

となり、これを (IX.4) 式へ代入すると、

$$s\mathcal{Q}[n(t)] - n(0) = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} \mathcal{Q}[n(t)] + \frac{\lambda}{(s+\lambda)} \frac{\beta}{\Lambda} \mathcal{Q}[n(t)] + \frac{\lambda}{(s+\lambda)} C(0) \quad \text{..... (IX.7)}$$

である。この (IX.7) 式を、 $\mathcal{Q}[n(t)]$  について整理すると、

$$\begin{aligned} s\mathcal{Q}[n(t)] - n(0) &= \left\{ \frac{\rho - \beta}{\Lambda} + \frac{\lambda}{(s+\lambda)} \frac{\beta}{\Lambda} \right\} \mathcal{Q}[n(t)] + \frac{\lambda}{(s+\lambda)} C(0) \\ &= \frac{(s+\lambda)\rho - s\beta}{(s+\lambda)\Lambda} \mathcal{Q}[n(t)] + \frac{\lambda}{(s+\lambda)} C(0) \end{aligned} \quad \text{..... (IX.8)}$$

から、

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}[n(t)] &= \frac{1}{\left\{ s - \frac{(s+\lambda)\rho - s\beta}{(s+\lambda)\Lambda} \right\}} \left\{ n(0) + \frac{\lambda}{(s+\lambda)} C(0) \right\} \\ &= \frac{1}{s^2\Lambda + s(\lambda\Lambda + \beta - \rho) - \lambda\rho} \left\{ \Lambda(s+\lambda)n(0) + \Lambda\lambda C(0) \right\} \end{aligned} \quad \text{..... (IX.9)}$$

を得る。ここで、先の表中に示された形の式になるように、(IX.9) 式中の右辺の分母を $s$ について因数分解することを考える。この時、この分母をゼロとする解 $\omega$ は、

$$\omega^2\Lambda + \omega(\lambda\Lambda + \beta - \rho) - \lambda\rho = 0 \quad \text{..... (IX.10)}$$

と与えられる。(IX.10) 式の根を $\omega_1$ 、 $\omega_2$ とすると、2次方程式の根の公式から、

$$\omega_1 = \frac{1}{2\Lambda} \left\{ -(\lambda\Lambda + \beta - \rho) + \sqrt{(\lambda\Lambda + \beta - \rho)^2 + 4\lambda\Lambda\rho} \right\} \quad \text{..... (IX.11)}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2\Lambda} \left\{ -(\lambda\Lambda + \beta - \rho) - \sqrt{(\lambda\Lambda + \beta - \rho)^2 + 4\lambda\Lambda\rho} \right\} \quad \text{..... (IX.12)}$$

と求めることができる。これを (IX.9) 式へ代入して、整理すると、

$$\mathcal{Q}[n(t)] = \frac{(s+\lambda)n(0) + \lambda C(0)}{(s-\omega_1)(s-\omega_2)} \quad \text{..... (IX.13)}$$

となる。この結果から、逆ラプラス変換をすると、表IX.1より、

$$\begin{aligned} n(t) = \mathcal{Q}^{-1}[n(t)] &= n(0) \left\{ \frac{\lambda + \omega_1}{\omega_1 - \omega_2} \exp(\omega_1 t) + \frac{\lambda + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \exp(\omega_2 t) \right\} \\ &\quad + \lambda C(0) \left\{ \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \exp(\omega_1 t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \exp(\omega_2 t) \right\} \end{aligned} \quad \text{..... (IX.14)}$$

と求めることができる。

ここで、(IX.10) 式を、 $\rho$ について表すように変形すると、

$$\rho = \frac{\omega^2 \Lambda + \omega(\lambda \Lambda + \beta)}{(\omega + \lambda)} = \omega \Lambda + \frac{\omega \beta}{\omega + \lambda} \dots\dots\dots (X.15)$$

の逆時間方程式を得る。

ここでは、参考文献をもとに、ラプラス変換の特徴を紹介した。数学的に厳密な説明は、ラプラス変換の参考書を参照していただきたい。

### X. フーリエ変換 (Fourier Transformation)

フーリエ変換とは、ある任意の時間信号を周波数領域で表したものである。もっと具体的に述べると、たとえば電気信号等の時間変化を、周波数成分に分けて、どの周波数がどの程度の大きさであるか分析することである。ここで、「どの周波数がどの程度の大きさであるか」をまとめたものを、スペクトルと呼ぶ。フーリエ変換を行うには、電気信号の時間変化(これを波形と呼ぶ)が原則的には一定の周期を持っていることが必要であり、複雑な波形の場合、ある短い部分に区切り、その短い区間内で波形が繰り返されていると仮定する。(この区間を周期と呼ぶ)。その概念を、簡単な「物理的イメージ」で表す。たとえば、ある一定の周波数(ここでは、2Hzとする)の信号をスペクトルとしてグラフにすると、図X.1のようになる。図X.1では、横軸の2Hzの周波数の位置に、振幅分の大きさの鋭いピークとなる(これを線スペクトルと呼ぶ)。

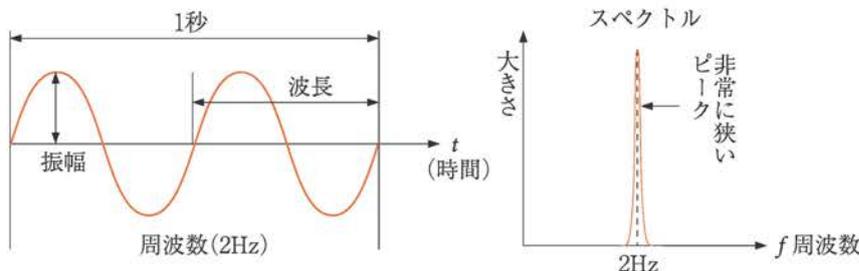
次に、同じ周波数の信号で、振幅が違う場合の例を図X.2に示す。振幅は、たとえば音で考えると、その大きさが音の大きさ(強・弱)に対応する。つまり、振幅を小さくするということは、音量を小さくすることに対応する。したがって、スペクトルにおいてピークの値が小さいと、音も弱いということである。

次に、周波数が増加する場合として、2Hzであった周波数が3倍の6Hzになった場合のスペクトルを図X.3に示す。そうすると、スペクトルでは、ピーク的位置が2Hzから6Hzへ変わる。このように、周波数を上げると、元の信号に比べて高い音になる。

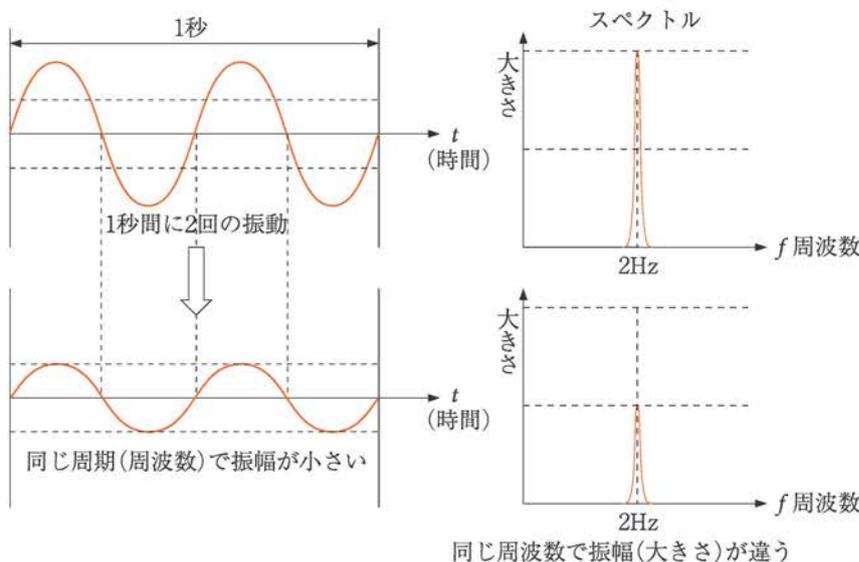
これと同様の解析を、複雑な波形に対して、周波数に分解し、それぞれの周波数に対応する振幅を求めることが、フーリエ変換である。そのことを数式で表すと、ある連続関数 $f(x)$ に対して、その角周波数を $\omega=2\pi f$ とすると、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots (X.1)$$

と定義する。ここで、 $i$ は虚数単位( $i^2=-1$ )である(電気関係では、電流の $i$ と区別するために、虚数単位は $j$ で表す方が一般的である)。また、角周波数は、角速度や角



図X.1 ある一定の周波数の信号のスペクトル(2Hzの場合)



図X.2 周波数が同じで振幅が異なる場合のスペクトルの例(2Hzの場合)

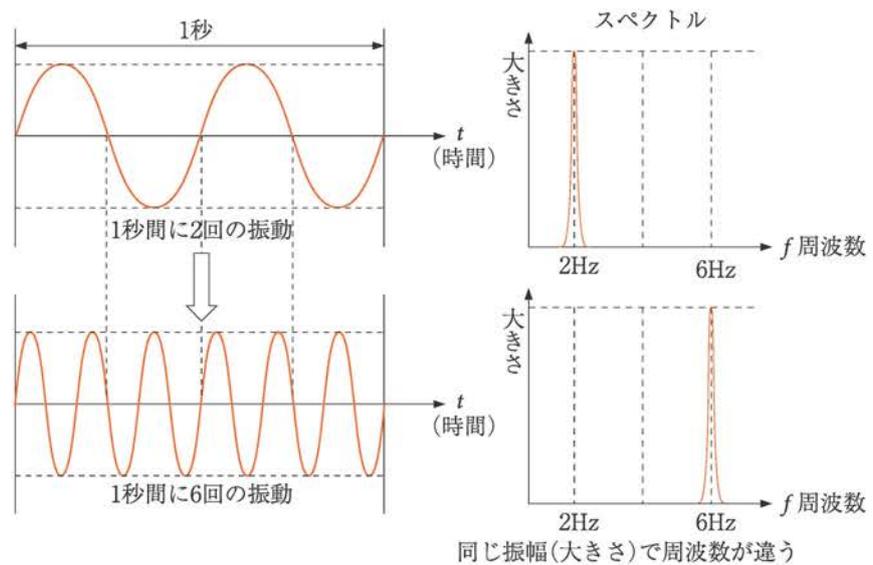


図 X.3 周波数が増加した場合のスペクトルの例(2Hzから6Hzへ増加)

振動数とも呼ばれ、角度を一周期の時間で割った商で表す ( $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ )。ここで、 $f$ は、振動数や周波数と呼ぶ(位相と呼ぶ場合もある)。これが、フーリエ変換の定義式であり、この逆変換もあるが、ここでは触れない。

ここで、 $\delta$  関数(デルタ関数=インパルス)のフーリエ変換を考える(制御の分野では、 $\delta$  関数をシステムに入力した場合の応答出力を観測することが基本事項のひとつであり、これをインパルス応答と呼ぶ)。 $\delta$  関数のフーリエ変換は、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1 \dots\dots\dots (X.2)$$

である。つまり $\delta$  関数をフーリエ変換すると、全ての周波数で一様に値1を持つということである。

もっと簡単に表現すると、振幅も位相も、全周波数帯域において周波数特性がフラットと言うことである。言い換えると、インパルス応答が解れば、それをフーリエ変換する事で振幅と位相(これらをまとめて、複素周波数特性)が解る、と言うことである。これは、制御理論において非常に重要なことである。

次に、純粋な正弦波をフーリエ変換した場合は、前述の図X.1になる。周波数領域でどんな複雑な特性であっても、この様々な周波数の正弦波をフーリエ変換し、振幅に相当する係数を掛けたものを、無限に細かく組み合わせることで、表現できるということが想像できよう。

つまり、図X.4に示すようなイメージである。これが、(X.1)式が言っていることである。

ここでは、参考文献をもとに、フーリエ変換の概念を紹介した。もう少し詳しく概念を知るには、参考文献を参照されたい。また、数学的に厳密な説明は、フーリエ変換の参考書を参照していただきたい。

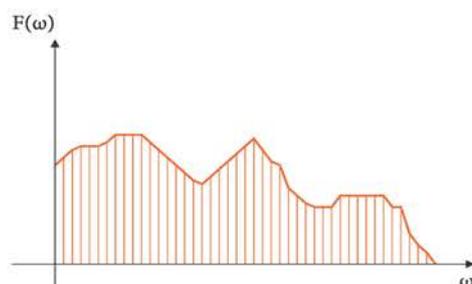


図 X.4 複雑な波形のスペクトルのイメージ