第5章
原子炉の臨界

1．はじめに
2．中性子源が既知の場合と未知（核分裂中性子源）の場合の比較
3．核分裂中性子源を含む拡散方程式
4．実効増倍率の計算とバックリング
5．中性子束の規格化
6．原子炉の臨界方程式
7．2群拡散方程式と四因子公式・六因子公式
8．臨界方程式の応用
9．原子炉の実効増倍率と反射体
10．まとめ

〔この章のポイント〕

原子炉内では、中性子は核分裂から生まれる。核分裂の量は中性子束によって決まるが、この中性子束は未知数である。つまり、原子炉の解析においては、中性子源は未知数として扱わねばならない。第4章では、中性子源が与えられた状態で拡散方程式を解いたが、第4章の知識のみでは核分裂中性子を含む状態を直接取り扱うことはできない。これを解決するため、[中性子の発生/中性子の消滅]で定義される実効増倍率というパラメータを新たに導入する。実効増倍率は、原子炉からの中性子の漏れの量と関係するが、この中性子の漏れの量を取り扱うために、バックリングというパラメータも新たに導入する。バックリングを用いることで、原子炉を臨界にするための条件を表す臨界方程式を導くことができる。また、原子炉内における中性子のバランスを物理的に分かりやすく説明する四因子公式・六因子公式についても学ぶ。

第5章 原子炉の臨界

5.1 はじめに

第４章では、拡散方程式を解析的に解くことにより、体系内の中性子束分布を計算する方法を学んだ。しかし、第４章では空間分布や強度が既知の中性子源が体系に存在する場合のみを対象としていた。

言うまでもなく、実際の原子炉においては、中性子は核分裂により発生する。すなわち、運転中の原子炉内における中性子源は、主として核分裂によるものである。そして、核分裂は中性子により引き起こされる。拡散方程式を解いて求めようとしているものが中性子束であることを考えると、原子炉の解析では、中性子源は既知ではなく、未知として取り扱わなければならないことが分かる。本章では、核分裂中性子源を含めて拡散方程式を解く方法について議論する。

ちょっと考えると、第４章で述べた中性子源が既知の場合と、核分裂中性子源を取り扱う場合には大きな違いはないように思えるかもしれない。しかし、この２つは、全く異なったタイプの問題であることに注意を払っておく必要がある。本教科書において、わざわざ章を分けて取り扱っているのはこのためである。

以下では、まず、第４章で学んだ知識を用いて核分裂中性子源の取り扱いを試みる。そして、第４章の知識のみではなぜうまく取り扱えないかについて考察したのち、核分裂中性子源を取り扱う理論的枠組みについて議論する。

5.2 中性子源が既知の場合と未知（核分裂中性子源）の場合の比較

以下では、２つの簡単な例を通じて、第４章で取り扱った中性子源問題（中性子源の位置や強度が既知）と本章で取り扱う核分裂中性子源問題（中性子源の位置や強度が中性子束に依存するため未知）の違いについて考察する。

5.2.1 無限均質体系の例

始めに、もっとも単純なケースとして無限に大きく、均質な炉心を持つ原子炉を考える。巨視的吸収断面積をΣ_a [1/m]、巨視的核分裂断面積をΣ_f [1/m]、１回あたりの核分裂で放出される平均中性子数をνとする。この場合、中性子束は空間に依存しないため、(4.16) 式は以下のように与えられる。

$$\Sigma_a\phi=S \quad \cdots\cdots (5.1)$$

核分裂から発生する中性子は、以下の形で与えられる。

$$\nu\Sigma_f\phi \quad \cdots\cdots (5.2)$$

原子炉内では、核分裂以外にも、起動用の中性子源や (γ,n) 反応などで発生する中性子が存在するが、原子炉が極めて低い出力でない限り、これらの影響は無視することができる。そこで、中性子源としては、核分裂によるもののみを考える。この場合、(5.1) 式は以下のようになる。

$$\Sigma_a\phi=\nu\Sigma_f\phi \quad \cdots\cdots (5.3)$$

(5.3) 式を変形すると、

$$(\Sigma_a-\nu\Sigma_f)\phi=0 \quad \cdots\cdots (5.4)$$

(5.4) 式を満足するためには、

$$\phi=0 \quad \cdots\cdots (5.5)$$

もしくは、

$$\Sigma_a=\nu\Sigma_f \quad \cdots\cdots (5.6)$$

でなければならないことが分かる。(5.5) 式はいわゆる「意味のない」解であり、中性子束として零でない値を求める場合は、(5.6) 式の条件を満たす必要がある。言い換えると、(5.6) 式の条件を満たす場合のみ、中性子束は零でない値をとり得る。ただし、この場合でも、中性子束の値は任意である（一意には決まらない）。

一般に原子炉の設計とは、原子炉内の物質配置などを決める作業である。すなわち、巨視的吸収断面積や巨視的核分裂断面積などは、設計者が決めることができるパラメータのはずである。にもかかわらず、上記の議論では、(5.6) 式のような条件を満足することを求められている。これは達成可能なのだろうか?

5.2.2 一次元平板体系の例

図5.1に示す一次元平板状の原子炉を考える。拡散係数をD [m]、巨視的吸収断面積をΣ_a [1/m]、巨視的核分裂断面積をΣ_f [1/m]、一回あたりの核分裂で放出される平均中性子数をνとする。一次元平板体系なので、拡散方程式は、以下の形で与えられる。

$$-D\frac{d^2\phi}{dx^2}+\Sigma_a\phi=\nu\Sigma_f\phi \quad \cdots\cdots (5.7)$$

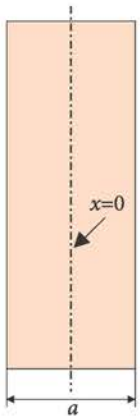

図5.1 平板状原子炉の体系

ここで、拡散係数Dは空間依存性がない、つまり一定値であると仮定した。境界条件は、原子炉の表面 (体系端) で中性子束が零とする。

(5.7) 式を以下のように変形する。

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+B^2\phi=0 \quad \cdots\cdots (5.8)$$

ここで、

$$B^2=\frac{1}{D}\left(\nu\Sigma_f-\Sigma_a\right) \quad \cdots\cdots (5.9)$$

である。(5.8) 式の一般解は以下のように与えられる。

$$\phi(x)=c_1\cos(Bx)+c_2\sin(Bx) \quad \cdots\cdots (5.10)$$

原子炉はx=0に対して対称であるため、c_2=0であり、(5.10) 式は、

$$\phi(x)=c_1\cos(Bx) \quad \cdots\cdots (5.11)$$

となる。また、境界条件は、

$$\phi(-\frac{a}{2})=\phi(\frac{a}{2})=0 \quad \cdots\cdots (5.12)$$

であることから、

$$c_1\cos(-\frac{Ba}{2})=c_1\cos(\frac{Ba}{2})=0 \quad \cdots\cdots (5.13)$$

つまり、

$$B=\frac{\pi}{a} \quad \cdots\cdots (5.14)$$

となる。(注5.1)

さて、Bは、(5.9) 式で定義されていたことを思い出そう。(5.9) 式の右辺は拡散係数、巨視的核分裂断面積、巨視的吸収断面積などで定義されており、原子炉の組成や温度に対して一意に与えられる。つまり、入力値である。一方、(5.14) 式の右辺は原子炉の寸法が与えられれば、これまた一意に決まる形となっている。一般に原子炉の設計とは、原子炉の組成や寸法を決める作業のはずである。とすると、(5.9) 式と (5.14) 式は、一般には整合しないこととなる。言い換えると、解がないことになる。何が悪かったのだろうか?

5.3 核分裂中性子源を含む拡散方程式

実は、拡散方程式に単純に核分裂中性子源を導入することはできず、(5.15) 式は一般的には成り立たない。

$$-D\nabla^2\phi+\Sigma_a\phi=\nu\Sigma_f\phi \quad \cdots\cdots (5.15)$$

注5.1：厳密に言うと、$B=n\frac{\pi}{a}$、nは任意の奇数であるが、ここでの議論に直接関連しないので、$B=\frac{\pi}{a}$のみに着目している。

(5.15) 式が成り立つのは、中性子の漏れ・吸収と核分裂による中性子の発生が厳密に等しいときだけである。すなわち、「原子炉が完全に臨界状態」という特殊な場合についてのみ、成り立つこととなる。逆に言うと、「臨界状態」から少しでもはずれた状態の原子炉について、(5.15) 式を直接適用することはできない。これは、(4.16) 式あるいは (4.17) 式が定常状態を仮定していることによる。直感的に明らかなように、臨界状態でない原子炉内 (中性子源はないものとする) においては、中性子束は定常とはならず、時間とともに変化 (増加もしくは減少) する。このため、本来は時間依存の拡散方程式を適用する必要がある。時間依存の拡散方程式は、(4.11) 式および (4.14) 式より、以下のように書くことができる。

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{1}{v}\frac{\partial (vn)}{\partial t}=\frac{1}{v}\frac{\partial \phi}{\partial t}=D\nabla^2\phi-\Sigma_a\phi+\nu\Sigma_f\phi \quad \cdots\cdots (5.16)$$

第４章で学んだように、(5.16) 式の右辺は中性子の数のバランスを考慮するものであることから、中性子の数のバランスが取れていない場合、中性子数が時間的に変化することを示す。したがって、(5.16) 式の左辺は、中性子数の時間変化を表すものとなっている。

第７章で議論するように、時間依存の拡散方程式を解くことは、特に空間依存性を考慮する場合にはかなりの手間を要する。そこで、通常の原子炉の解析では、時間依存の拡散方程式を直接解かなくてもすむように、新たな定数kを導入し、核分裂中性子源を$1/k$倍する。(注5.2)

$$-D\nabla^2\phi+\Sigma_a\phi=\frac{1}{k}\nu\Sigma_f\phi \quad \cdots\cdots (5.17)$$

(5.17) 式において、kの値を適切に決めれば、どのような原子炉の組成 (巨視的断面積) および寸法に対しても常に等式が成り立つようにできる。実際の炉心解析においては、(5.17) 式が成り立つようにkの値を決めることとなる。このkの値は以下のように振る舞う。

・核分裂中性子源が吸収・漏れより少ないとき …… ：$k<1$
・核分裂中性子源と吸収・漏れがちょうど釣り合うとき …… ：$k=1$
・核分裂中性子源が吸収・漏れより多いとき …… ：$k>1$

つまりkの値は、原子炉の状態と密接に関連することがわかる。では、定数kの物理的意味をもう少し考察してみよう。

(5.17) 式を変形すると、以下の式を得る。

$$k=\frac{\nu\Sigma_f\phi}{\Sigma_a\phi-D\nabla^2\phi} \quad \cdots\cdots (5.18)$$

(5.18) 式の分子は発生中性子数、分母は吸収中性子数+漏洩中性子数である。すなわち、kは、原子炉内で中性子がどの程度増倍するかを示すパラメータの一つであり、**実効増倍率** (effective multiplication factor) と呼ばれる。実効増倍率は原子炉物理において最も重要なパラメータの一つである。

ちなみに、中性子の漏れが存在しない体系では、$D\nabla^2\phi=0$であり、実効増倍率は以下のようになる。

$$k_\infty=\frac{\nu\Sigma_f\phi}{\Sigma_a\phi}=\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} \quad \cdots\cdots (5.19)$$

3.9節でも述べたように、k_∞は**無限増倍率** (infinite multiplication factor) と呼ばれている。(注5.3)

〈例題5.1〉無限増倍率の計算
均質で無限に大きい原子炉を考える。この原子炉の炉心は、^{235}U、^{1}H、^{16}Oからなる溶液であると仮定する。^{235}U、^{1}Hの微視的吸収断面積をそれぞれ1000 (barn)、

注5.2：ここでは簡単に書いたが、実際の原子炉において、「核分裂中性子源を$1/k$倍する」ような便利な操作は不可能である。つまり、(5.17) 式は、ある種の「便法」を用いた結果得られる式であり、k=1でない原子炉に対しては、「仮想的」もしくは「正確でない」といえる。ただし、一般の原子炉の設計では、臨界に近い状態を扱うため、大きな問題にはならない。なお、使用済み燃料を貯蔵するプールの臨界解析や、未臨界状態の原子炉に外部から陽子を打ち込み、発生した中性子で運転を行う「加速器駆動未臨界炉」など、臨界からの距たりが大きい特殊な体系の場合、(5.17) 式自体の精度が問題になることもあることに注意する必要がある。

注5.3：一般に、漏れを考慮した増倍率は実効増倍率、漏れを考慮しない増倍率は無限増倍率と呼ばれる。従って、無限増倍率と実効増倍率の差異により、炉心からの中性子の漏れ量を見積もることができる。

0.1（barn）、微視的核分裂断面積を500（barn）、0（barn）とする。なお、^{16}Oの吸収は簡単のために無視する。また、^{235}U、^{1}Hの原子数密度をそれぞれ$5\times10^{+25}$[1/m^3]、$6\times10^{+28}$[1/m^3]とする。
この原子炉の炉心の巨視的吸収断面積、巨視的核分裂断面積を求めよ。また、求めた巨視的断面積を使用して無限増倍率を計算せよ。ただし、^{235}Uの核分裂あたりの中性子放出数νを2.5とする。

〈解答5.1〉

巨視的吸収断面積Σ_aおよび巨視的核分裂断面積Σ_fは^{235}Uおよび^{1}Hの微視的断面積および原子数密度から以下のように求められる。

$\Sigma_a=1000\times10^{-28}\times5\times10^{25}+0.1\times10^{-28}\times6\times10^{28}=5.6$[1/m]

$\Sigma_f=500\times10^{-28}\times5\times10^{25}=2.5$[1/m]

無限増倍率は（5.19）式により、

$$k_\infty=\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a}=\frac{2.5\times2.5}{5.6}\approx1.116$$

5.4 実効増倍率の計算とバックリング

前節では、核分裂中性子源を含む拡散方程式に新たなパラメータkを導入し、その物理的意味を考察した。本節では、パラメータk、すなわち実効増倍率の計算をいくつかの単純な体系について行うこととする。

まず、解くべき拡散方程式は

$$-D\nabla^2\phi+\Sigma_a\phi=\frac{1}{k}\nu\Sigma_f\phi \quad \cdots\cdots (5.20)$$

（5.20）式は以下のように簡略化することができる。

$$\nabla^2\phi+B^2\phi=0 \quad \cdots\cdots (5.21)$$

ここで、

$$B^2=\frac{1}{D}\left(\frac{1}{k}\nu\Sigma_f-\Sigma_a\right) \quad \cdots\cdots (5.22)$$

原子炉内の中性子束分布は（5.21）式を満足することから、（5.21）式を**原子炉方程式**（reactor equation）と呼ぶ。（5.22）式をkについて解くと、

$$k=\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a+DB^2} \quad \cdots\cdots (5.23)$$

（5.23）式において、$\nu\Sigma_f$、Σ_a、Dは一般的に原子炉の組成によって一意に決まる（入力）値である。そこで、実効増倍率kを求めるためには、何らかの方法を用いてB^2を計算する必要がある。そこで、（5.21）式に注目する。すなわち、B^2が（5.21）式を満足する必要があることを利用するのである。以下では、具体的にいくつかの体系でB^2を計算した後、求めたB^2から実効増倍率を計算する方法について検討する。

5.4.1 平板体系

まず、図5.1に示す厚さaの平板体系から考察する。これは、5.2節の考察ではうまく取り扱えなかった例である。この体系における原子炉方程式、つまり（5.21）式は

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+B^2\phi=0 \quad \cdots\cdots (5.24)$$

（5.24）式の一般解は

$$\phi(x)=c_1\cos(Bx)+c_2\sin(Bx) \quad \cdots\cdots (5.25)$$

中性子束は$x=0$に関して対称であるため、

$$\phi(x)=c_1\cos(Bx) \quad \cdots\cdots (5.26)$$

境界条件は、

$$\phi(-\frac{a}{2}) = \phi(\frac{a}{2}) = 0 \quad \cdots\cdots (5.27)$$

(5.26) 式を適用すると、

$$c_1 \cos(-\frac{Ba}{2}) = c_1 \cos(\frac{Ba}{2}) = 0 \quad \cdots\cdots (5.28)$$

これより、

$$B = B_n = \frac{n\pi}{a} \quad \cdots\cdots (5.29)$$

ここで、nは任意の奇数である。ここでB_nを**固有値** (eigenvalue) 、$\cos(B_n x)$を**固有関数** (eigenfunction) と呼ぶ。(5.29) 式は、(5.20) 式を満足する解 (中性子束および実効増倍率) が数学的には無数に存在することを示している。しかし、後述の理由により、臨界状態の原子炉においては、これらのうち、ただ一つの解 (n=1) のみを対象とすればよい。これより、実効増倍率kは、

$$k = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + D\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad \cdots\cdots (5.30)$$

中性子束分布は

$$\phi(x) = c_1 \cos(\frac{\pi}{a} x) \quad \cdots\cdots (5.31)$$

となる。原子炉の厚さaが大きくなると、(5.30) 式の値は無限増倍率を与える (5.19) 式に近づく。これは、原子炉が大きいほど表面からの漏れ量が少なくなるため妥当な結果であるといえる。

さて、(5.29) 式で得られた固有値B_nと固有関数$\cos(B_n x)$について、物理的な考察を加えてみよう。

(5.29) 式を (5.26) 式に代入して得られる中性子束 (固有関数) の一部を図5.2に示す。

B_1に対する中性子束分布を**基本モード** (fundamental mode) 、それ以外のB_3, B_5 …に対する中性子束分布を**高次モード** (higher mode) と呼んでいる。この概念は、弦の振動を考えるとイメージしやすい。つまり、図5.2の固有関数を弦の振動と考えるのである。この場合、B_nは弦の振動数に対応したものとなる。

では、弦を振動させることを考えよう。弦のある場所をつまみ、引いて放す。これにより弦は振動する。弦の振動は様々な形があるが、しばらく放置しておくと、どうなるだろうか？もっとも周波数の低い基本モードが最後まで残り、高調波の高次モードは

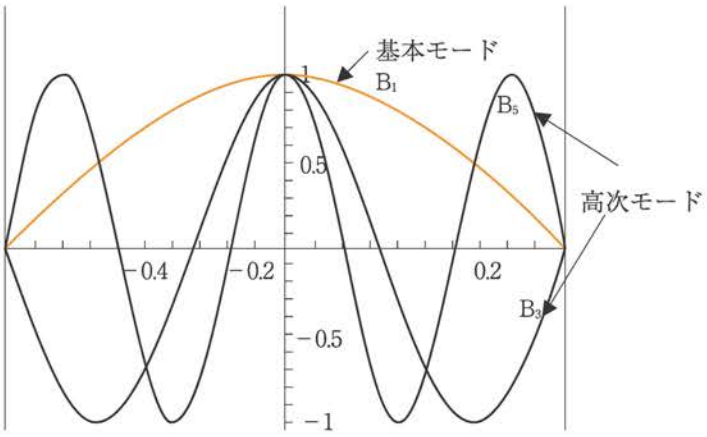

図5.2 平板体系の中性子束分布 (固有関数)

速く減衰するだろう、ということは直感的に想像できると思う。中性子束の場合も同じである。定常状態にある原子炉においては、減衰しやすい高次モードは存在せず、基本モードのみが残っている。

また、上記の議論は、以下のようにも解釈できる。基本モードおよび高次モードの中性子束に対する「実効増倍率」は、

$$k_n = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + D\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \quad \cdots\cdots (5.32)$$

である。n=1, 3, 5…であることを考えると、

$$k = k_1 > k_3 > k_5 \cdots \quad \cdots\cdots (5.33)$$

である。ここである原子炉を考える。仮に、この原子炉においては、高次モード（たとえばn=3）が定常状態になっていると仮定する。基本モードの実効増倍率 k_1 は高次モードの実効増倍率 k_3 より大きいため、基本モードの中性子束は定常状態にならない。すなわち、原子炉は臨界を越えるため、定常状態にならない。

以上のことから、臨界状態の原子炉は、実効増倍率が最も大きい基本モードが定常状態になっていることは明らかである。高次モードの「実効増倍率」は基本モードより小さいため未臨界となり、高次モードは時間とともに減衰する。

以上のことから、（5.20）式を満足する解は無数にあるが、定常状態で物理的に意味のある解は一つ（基本モード）のみであることが明らかになった。そこで、以下では基本モードのみに焦点を絞って話を進めることとする[注5.4]。

さて、話を原子炉の中性子束分布に戻そう。弦のアナロジーを用いた考察により、定常状態の原子炉内には中性子束の基本モードのみが存在することが明らかになった。結局のところ、中性子束の形は巨視的断面積によらず、（5.31）式で与えられ、原子炉の形状のみで決まっていることがわかる。これが核分裂中性子源を考慮した臨界問題の特徴である。

ちなみに、中性子源が一定の場合の中性子束は（4.42）式を用いると、以下のような形で与えられる。（平板の厚さがaの場合）

$$\phi(x) = \frac{L^2 S}{D}\left(1 - \frac{e^{x/L} + e^{-x/L}}{e^{a/2L} + e^{-a/2L}}\right) \quad \cdots\cdots (5.34)$$

（5.34）式は、原子炉の形状のみならず、巨視的断面積に依存した形になっており、（5.31）式とは全く異なっていることがわかる。

さて、（5.29）で定義されるBについてもう少し物理的な意味を議論しておこう。（5.24）式（原子炉方程式）を変形すると、

$$B^2 = -\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} \quad \cdots\cdots (5.35)$$

（5.35）式より、B^2は、中性子束分布の二次微分に比例して大きくなることがわかる。すなわち、B^2は、原子炉内の中性子束分布がどれだけ「湾曲（buckle）」しているかを示す指標となる。これより、B^2は、**バックリング**（buckling）と呼ばれる。単位は［1/m^2］である。たとえば平板原子炉の基本モードの場合、

$$B_1^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad \cdots\cdots (5.36)$$

となる。バックリングは、抽象的な概念ではあるが[注5.5]、中性子の漏れ量と密接に関連した量であることから、実機の炉心解析においてもしばしば現れる重要な量である。ここで、バックリングと中性子の漏れ量の関係を明らかにしておく。

（5.21）式の両辺に拡散係数Dを乗じると、以下の形に変形することができる。

$$-D\nabla^2\phi = DB^2\phi \quad \cdots\cdots (5.37)$$

注5.4：なお、高次モードは全く意味がない、ということでない点を強調しておきたい。ここでは、中性子源が存在せず、なおかつ定常の問題を扱っている。このような場合、基本モードのみが重要である。しかし、中性子源が存在したり、非定常であったりする問題に対しては、高次モードが実際に炉心の中に現れ、炉心の振る舞いに対して極めて重要な役割を果たす。たとえば、BWRにおいては、炉心内を流れる冷却材の熱水力的な挙動と炉心の核的な挙動が互いに影響を及ぼしあう（フィードバック効果、第８章）。一般にこのフィードバック効果はBWRの炉心を安定な状態に導き、外乱が与えられた際の炉心の固有の安全性における重要なメカニズムになる。しかし、炉心内の燃料の設計、燃料の配置方法、冷却材の流量によってはこのフィードバック効果が炉心をむしろ不安定にする場合がある。この不安定性の評価には非定常の効果を取り込む必要があり、この際に高次モードの解析が重要となる。

注5.5：（5.22）式で表されるB^2は巨視的断面積など（原子炉内の）材料で決まる。一方、（5.36）式で表されるB^2は炉心の幾何形状から決まる。このことから、(5.22)式で与えられるB^2を材料バックリング、（5.36）式の様に幾何形状で表されるB^2を幾何バックリングと呼ぶことがある。しかし、「材料バックリング」は概念的に抽象度が高いこと、また現在の炉心設計では用いられていないことから、本教科書では「幾何バックリング」を念頭に置いた説明になっている。

(5.37) 式の左辺は中性子の漏れ量を表しているため、体系からの中性子の漏れ量は、拡散係数DとバックリングB^2および中性子束ϕにそれぞれ比例することがわかる。(5.37) 式は、たとえばBWR炉心解析で幅広く用いられている修正一群の拡散方程式を導く場合、PWR炉心解析で二次元計算を行う場合の軸方向への漏れ量の評価、など様々な場面で活用されている。

以上の議論により、原子炉内の中性子束分布の形状および炉心の実効増倍率を計算することができた。しかし、(5.31) 式に示すように、中性子束分布に関して未定定数がまだ残っている状態である。この未定定数の取り扱いについては、5.5節で述べる。

5.4.2 無限円柱体系

5.4.1節では、平板体系における中性子束・実効増倍率およびバックリング (B^2) を計算した。ここでは、半径Rの無限円柱体系においてこれらの値を計算する。なお、体系の境界で中性子束を零とする境界条件を用いる。

無限円柱体系における原子炉方程式は以下の通りである。

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0 \quad \cdots\cdots (5.38)$$

ここで、無限円柱体系においては、第４章の注4.8より、

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr} \quad \cdots\cdots (5.39)$$

であるため、

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\phi}{dr} + B^2\phi = 0 \quad \cdots\cdots (5.40)$$

となる。(5.40) 式の一般解は

$$\phi(r) = c_1 J_0(Br) + c_2 Y_0(Br) \quad \cdots\cdots (5.41)$$

である。ここで、J_0、Y_0はそれぞれ第一種、第二種のベッセル関数 (Apendix Ⅷ参照) である。$Y_0(0)$は$-\infty$であることから、中性子束は有限の値を取るという条件に相反することとなり、解として不適切である。従って、c_2=0となり、結局 (5.41) 式は

$$\phi(r) = c_1 J_0(Br) \quad \cdots\cdots (5.42)$$

となる。境界条件を考慮すると、

$$\phi(R) = c_1 J_0(BR) = 0 \quad \cdots\cdots (5.43)$$

これより、

$$B = B_n = \frac{x_n}{R} \quad \cdots\cdots (5.44)$$

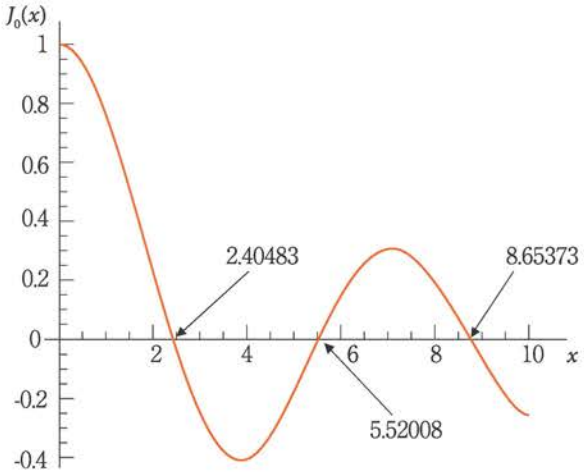

図5.3 第一種ベッセル関数の零点(Appendix Ⅷ参照)

ここで、x_nはベッセル関数の零点であり（5.45）式を満たす（図5.3）。

$$J_0(x_n)=0 \quad \cdots\cdots (5.45)$$

平板体系と同じように、（5.43）式を満たすバックリングBは数学的には無限に存在するが、前述の議論の通り、基本モードのみを考慮すればよいため、

$$\phi(r)=c_1 J_0(B_1 r)\approx c_1 J_0\left(\frac{2.405}{R}r\right) \quad \cdots\cdots (5.46)$$

である。なお、ここで、x_1=2.405と近似した。

また、炉心の実効増倍率は、（5.23）式より、

$$k=\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a+DB^2}=\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a+D\left(\frac{2.405}{R}\right)^2} \quad \cdots\cdots (5.47)$$

である。原子炉の半径Rが大きくなると、原子炉からの中性子の漏れ量が減少するため、（5.47）式の値は無限増倍率に近づく。これは、平板体系の場合と同じである。

5.4.3 有限円柱体系

次に、実際の原子炉に近い体系として、有限円柱体系（半径R、高さH）について考察する。なお、体系の境界で中性子束を零とする境界条件を用いる。この体系に対する原子炉方程式は、第４章の注4.8より、

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots (5.48)$$

であることから、

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+B^2\phi=0 \quad \cdots\cdots (5.49)$$

（5.49）式の解を求めるために、解を（5.50）式の形におく。

$$\phi(r,z)=\phi_r(r)\phi_z(z) \quad \cdots\cdots (5.50)$$

（5.50）式を（5.49）式に代入し、若干変形すると

$$\frac{1}{\phi_r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\phi_r}{\partial r}+\frac{1}{\phi_z}\frac{\partial^2\phi_z}{\partial z^2}=-B^2 \quad \cdots\cdots (5.51)$$

（5.51）式の左辺第一項はrのみの関数、第二項はzのみの関数である。ここで、（5.51）式の左辺第一項の値がrに依存すると仮定する。左辺第二項はzのみの関数、右辺は定数であることを考えると、左辺第一項の値がrに依存する場合、（5.51）式を任意のrについて成り立たせることができない。すなわち、（5.51）式の左辺第一項は定数でなければならない。また、同様の考察により、第二項についても定数でなければならないことが分かる。以上のことから、（5.51）式の左辺第一項および第二項はそれぞれ定数であり、以下のようにrおよびz方向に分離することが可能となる。なお、$B_r^2+B_z^2=B^2$である。

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\phi_r}{dr}+B_r^2\phi_r=0 \quad \cdots\cdots (5.52)$$

$$\frac{d^2\phi_z}{dz^2}+B_z^2\phi_z=0 \quad \cdots\cdots (5.53)$$

ちなみに、式の形からわかるように、（5.52）式は無限円柱に対する原子炉方程式、（5.53）式は無限平板に対する原子炉方程式と同一の形である。従って、ϕ_rは（5.46）式、ϕ_zは（5.31）式で与えられる。これより、有限円柱形状の原子炉における中性子束分布は、

$$\phi(r,z)=\phi_r(r)\phi_z(z)=c_1J_0(\frac{2.405}{R}r)\cos(\frac{\pi}{H}z) \quad \cdots\cdots (5.54)$$

$$B^2=B_r^2+B_z^2=\left(\frac{2.405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \quad \cdots\cdots (5.55)$$

となる。

(5.55) 式は、径方向および軸方向のバックリングを足しあわせた形となっている。言い換えると、径方向および軸方向の中性子の漏れは独立に計算することが可能であり、足しあわせたものが原子炉全体からの中性子の漏れ量となる(注5.6)。

また、炉心の実効増倍率は、(5.23) 式より、

$$k=\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a+D\left[\left(\frac{2.405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right]} \quad \cdots\cdots (5.56)$$

である。(5.56) 式において、軸方向長さ (H) が非常に大きい場合には、(5.56) 式は (5.47) 式に一致する。

注5.6：ここで述べた変数分離を適用できるのは、厳密には原子炉の端で中性子束零境界条件を適用した場合のみである。このような計算条件を適用できる原子炉は反射体がついていないものであることから、「裸の原子炉」と呼ばれることもある。通常の原子炉には反射体がついており、変数分離は厳密には適用できないが、実用上、径方向と軸方向の漏れを分離して取り扱っても問題ない。

5.4.4 直方体体系

最後に、三次元体系を取り扱う。これまでと同様、体系の境界で中性子束を零とする境界条件を用いる。直方体体系 (寸法X,Y,Z) に対する原子炉方程式は、

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots (5.57)$$

であることから、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+B^2\phi=0 \quad \cdots\cdots (5.58)$$

となる。(5.58) 式を解くために、有限円柱体系の場合と同様、解を (5.59) の形におく。

$$\phi(x,y,z)=\phi_x(x)\phi_y(y)\phi_z(z) \quad \cdots\cdots (5.59)$$

(5.59) 式を (5.58) 式に代入し、$\phi_x(x)\phi_y(y)\phi_z(z)$で割ると、

$$\frac{1}{\phi_x(x)}\frac{\partial^2\phi_x(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{\phi_y(y)}\frac{\partial^2\phi_y(y)}{\partial y^2}+\frac{1}{\phi_z(z)}\frac{\partial^2\phi_z(z)}{\partial z^2}+B^2=0 \quad \cdots\cdots (5.60)$$

有限円柱体系と同じ議論により、(5.60) 式の左辺の各項は、定数でなければならない。これより、

$$\frac{d^2\phi_x(x)}{dx^2}+B_x^2\phi_x(x)=0 \quad \cdots\cdots (5.61)$$

$$\frac{d^2\phi_y(y)}{dy^2}+B_y^2\phi_y(y)=0 \quad \cdots\cdots (5.62)$$

$$\frac{d^2\phi_z(z)}{dz^2}+B_z^2\phi_z(z)=0 \quad \cdots\cdots (5.63)$$

(5.61) 式～ (5.63) 式は一次元平板体系と同じ原子炉方程式である。従って、得られる中性子束は、

$$\phi(x,y,z)=\phi_x(x)\phi_y(y)\phi_z(z)=c_1\cos(\frac{\pi}{X}x)\cos(\frac{\pi}{Y}y)\cos(\frac{\pi}{Z}z) \quad \cdots\cdots (5.64)$$

であり、バックリングは、

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = \left(\frac{\pi}{X}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{Z}\right)^2 \quad \cdots\cdots (5.65)$$

となる。(5.64) 式、(5.65) 式は、平板体系における解を三方向に重ね合わせたものとなっている。原子炉の実効増倍率は、(5.23) 式より、

$$k = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + D\left[\left(\frac{\pi}{X}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{Z}\right)^2\right]} \quad \cdots\cdots (5.66)$$

である。(5.66) 式において、奥行きYおよび高さZが非常に大きい場合、一次元平板体系の (5.30) 式と一致する結果となる。

〈例題5.2〉 臨界寸法の計算

例題5.1で述べた原子炉が立方体形状であったとする。この原子炉がちょうど臨界になるための一辺の大きさを求めよ。なお、拡散係数を0.05[m]、外挿距離を0とする（原子炉表面で中性子束が0になるとする）。

〈解答5.2〉

(5.23) 式より

$$k = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} = \frac{2.5 \times 2.5}{5.6 + 0.05 \times B^2} = 1.0$$

従って、この原子炉をちょうど臨界にするためのバックリングは

$$B^2 = 13[1/\mathrm{m}^2]$$

立方体の原子炉のバックリングは原子炉の一辺をXとすると、(5.65) 式より、

$$B^2 = 3\left(\frac{\pi}{X}\right)^2$$

従って、一辺の大きさはX=1.51[m]となる。

なお、実際には、外挿距離は0ではないため、原子炉が臨界になる寸法は1.51[m]より小さくなる。

5.4.5 種々の体系における中性子束分布・バックリング・実効増倍率

いくつかの体系において炉心内の中性子束、バックリングおよび実効増倍率を求めてきた。これまでの結果を含め、代表的な体系における結果を表5.1にまとめる。なお、表中のc_1は未定定数であり、その決定方法については5.5節に示す。

5.5 中性子束の規格化

5.4節では、種々の形状の均質な原子炉について、炉心内の中性子束分布や実効増倍率などを求めた。5.4節の計算では、中性子束の相対的な形は決めることはできるが、その大きさについては決めることができなかった。そのため、表5.1における中性子束分布においても定数c_1が含まれている。すなわち、(5.21) 式を満足する解は、大きさ（絶対値）に関係しないということを示している。やや奇妙に思われるかもしれないが、先ほどの弦のアナロジーで考えるとわかりやすい。弦は大きくも小さくも振動させることができる。このとき、大きく振動させても、小さく振動させても、相対的な弦の振動の形は変わらない。そして、その振幅に相当するものが定数c_1に対応する。

原子炉の場合、数学的には、どのような中性子束の大きさでも定常状態を作り出すことができる。つまり、原理的にはどのような出力レベルにおいても、定常状態を作り出せることとなる。もっとも、実際の原子炉においては、熱的な制限値があるため、あまりにも高い出力にするわけにはいかないことは自明である。

表5.1 種々の原子炉形状におけるバックリング、中性子束分布および実効増倍率

炉心形状	寸法	バックリング	中性子束分布	実効増倍率
一次元平板	X	$\left(\frac{\pi}{X}\right)^2$	$c_1\cos(\frac{\pi}{X}x)$	$\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a+D\left(\frac{\pi}{X}\right)^2}$
二次元長方形	X, Y	$\left(\frac{\pi}{X}\right)^2+\left(\frac{\pi}{Y}\right)^2$	$c_1\cos(\frac{\pi}{X}x)\cos(\frac{\pi}{Y}y)$	$\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a+D\left[\left(\frac{\pi}{X}\right)^2+\left(\frac{\pi}{Y}\right)^2\right]}$
三次元直方体	X, Y, Z	$\left(\frac{\pi}{X}\right)^2+\left(\frac{\pi}{Y}\right)^2+\left(\frac{\pi}{Z}\right)^2$	$c_1\cos(\frac{\pi}{X}x)\cos(\frac{\pi}{Y}y)\cos(\frac{\pi}{Z}z)$	$\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a+D\left[\left(\frac{\pi}{X}\right)^2+\left(\frac{\pi}{Y}\right)^2+\left(\frac{\pi}{Z}\right)^2\right]}$
無限円柱体系	R	$\left(\frac{2.405}{R}\right)^2$	$c_1J_0(\frac{2.405}{R}r)$	$\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a+D\left(\frac{2.405}{R}\right)^2}$
有限円柱体系	R, H	$\left(\frac{2.405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2$	$c_1J_0(\frac{2.405}{R}r)\cos(\frac{\pi}{H}z)$	$\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a+D\left[\left(\frac{2.405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right]}$
一次元球体系	R	$\left(\frac{\pi}{R}\right)^2$	$c_1\frac{1}{r}\sin(\frac{\pi}{R}r)$	$\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a+D\left(\frac{\pi}{R}\right)^2}$

以上の議論から、中性子束分布に含まれる定数c_1は、原子炉の出力によって決められることがわかる。より具体的に、たとえば三次元直方体形状（寸法：X,Y,Z）の均質な原子炉の場合、体系表面で零中性子束境界条件を適用し、原子炉の出力をPとすると、c_1は以下の式によって決められる。

$$P = E_R\Sigma_f\int_{-Z/2}^{Z/2}\int_{-Y/2}^{Y/2}\int_{-X/2}^{X/2} c_1\cos(\frac{\pi}{X}x)\cos(\frac{\pi}{Y}y)\cos(\frac{\pi}{Z}z)dxdydz \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5.67)$$

ここで、

P：原子炉の出力［W］
E_R：核分裂あたりの放出エネルギー量［J/fission］
Σ_f：巨視的核分裂断面積［1/m］

である。(5.67) 式より、

$$c_1 = \frac{P\pi^3}{8E_R\Sigma_f XYZ} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.68)$$

となり、結局、中性子束は

$$\phi(x,y,z) = \frac{P\pi^3}{8E_R\Sigma_f XYZ}\cos(\frac{\pi}{X}x)\cos(\frac{\pi}{Y}y)\cos(\frac{\pi}{Z}z) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.69)$$

で与えられることとなる。

上記の手続きは実機の炉心解析においても行われる。炉心内の中性子束分布および実効増倍率については、拡散方程式を数値的に解いて求める。この段階で求めら

れる中性子束分布は、炉心内の核分裂中性子源をある値（多くの場合は核分裂中性子源を原子炉全体で体積積分した値が1になるよう）に規格化したものであり、絶対値は実際の中性子束と全く異なっている。次に得られた中性子束の絶対値を実際のものと一致させるため、原子炉の熱出力が入力値と一致するように中性子束を規格化する。このようにして得られた中性子束を絶対中性子束と呼ぶ。実機の炉心解析においては、解析で得られた中性子束に基づいて燃焼計算や発熱分布の計算を行うため、絶対中性子束への規格化は非常に重要なステップである。

5.6 原子炉の臨界方程式

5.4節では、様々な形状の炉心についてバックリング（B^2）を計算した。バックリングは原子炉の形状によって決まる。従って、原子炉の形状（バックリング）と組成（巨視的断面積）が決まれば、以下の（5.23）式によって実効増倍率を計算することができる。

$$k = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2}$$

原子炉が臨界になるための条件はk=1、つまり、

$$1 = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} \quad \cdots\cdots (5.70)$$

である。（5.70）式は**臨界方程式**（critical equation）と呼ばれ、原子炉が臨界になるための条件を示している。（5.70）式から、原子炉を臨界に調整するためには、以下の二つの方法があることがわかる。

（1）組成（すなわち巨視的断面積）が決まっている（与えられている）場合、寸法（バックリング）を調整する。
（2）寸法（バックリング）が決まっている場合、組成（巨視的断面積）を調整する。

（5.70）式の臨界方程式の物理的意味を少し考察してみよう。臨界方程式は、以下のように変形することができる。

$$\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} = \frac{\Sigma_a \cdot \nu\Sigma_f / \Sigma_a}{\Sigma_a + DB^2} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + DB^2} k_\infty = 1 \quad \cdots\cdots (5.71)$$

ここで、k_∞は（5.19）式で与えられる無限増倍率である。（5.71）式に含まれる項のうち、（5.72）式は、中性子が漏えいせずに炉心の中で吸収される確率を表している。

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + DB^2} &= \frac{\Sigma_a \phi}{\Sigma_a \phi + DB^2 \phi} \\ &= \frac{\text{炉心内での吸収}}{\text{炉心内での吸収} + \text{炉外への漏えい}} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (5.72)$$

（5.72）式を考慮すると、（5.71）式の臨界方程式は、原子炉が臨界になるための条件が、

〔無限（漏れがない）体系での増倍率（無限増倍率）〕
×〔中性子が漏れない確率（炉内で吸収される確率）〕=1　………（5.73）

であることを示している。すなわち、原子炉が臨界になるかどうかは、原子炉の組成により決まる無限増倍率と、主として原子炉の形状で決まる中性子が漏れない確率が関連しており、実効増倍率を大きくするためには、無限増倍率を大きくするか、中性子が漏れない確率を大きくする必要があることが分かる。原子炉が臨界になるときの寸法を**臨界寸法**（critical dimension）、燃料の質量を**臨界質量**（critical mass）という。

〈例題5.3〉 臨界寸法の計算

例題5.1で扱った原子炉が半径1.0[m]の円柱形状であるとする。この原子炉の実効増倍率が1になる場合の高さを求めよ。なお、外挿距離は0、拡散係数は0.05[m]とする。

〈解答5.3〉
例題5.2より、この原子炉を臨界にするときのバックリングは

B^2=13[1/m^2]

である。表5.1より、有限高さの円柱体系のバックリングは

$$B^2=\left(\frac{2.405}{\mathrm{R}}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

原子炉の半径がR=1.0[m]であるため、

H=1.17[m]

で臨界となる。
なお、実際には、外挿距離は0ではないため、原子炉が臨界になる炉心高さは1.17[m]より小さくなる。

〈例題5.4〉中性子吸収材による臨界調整
例題5.3において、原子炉の高さにかかわらず、炉心の実効増倍率を1未満にするためには、^{10}Bをどの程度加えればよいか。ただし、^{10}Bの微視的吸収断面積を500（barn）とし、拡散係数は^{10}Bの添加によって変化しないものとする。
〈解答5.4〉
原子炉の高さが無限であるときのバックリングは表5.1から

$$B^2=\left(\frac{2.405}{R}\right)^2=\left(\frac{2.405}{1.0}\right)^2=5.784[1/\mathrm{m}^2]$$

であり、巨視的吸収断面積は、^{10}Bの原子数密度をxとすると、例題5.1と同様の考え方より

$$\Sigma_a=1000\times10^{-28}\times5\times10^{25}+0.1\times10^{-28}\times6\times10^{28}+500\times10^{-28}\times x$$

$$=5.6+5\times10^{-26}\times x\ [1/\mathrm{m}]$$

となる。一方、^{10}Bは核分裂性物質ではないため、核分裂断面積は変化しない。これより、

$$k_{eff}=\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a+DB^2}=\frac{2.5\times2.5}{5.6+5\times10^{-26}\times x+0.05\times5.784}=1$$

したがって、

x=7.216×10^{24} [個/m^3]

より多い^{10}Bを入れると、高さにかかわらず原子炉の実効増倍率を常に1未満、すなわち未臨界にできる。なお、例題5.3と同様の理由により、実際にはここで求めたより多くの^{10}Bが必要となる。

5.7 ２群拡散方程式と四因子公式・六因子公式

前節までの議論においては、中性子エネルギーの群数を1群と仮定して来た。本節では、前節までの議論をより一般的にするため、中性子エネルギーの群数を2群として議論を行う。2群というエネルギー群数は原子炉内における中性子のエネルギー分布の複雑さを考えると、一見少ないように思えるかもしれない。しかし、2群での取り扱いを行うことで、(1) 高速群で中性子が発生し、(2) 水素などとの衝突により減速され、(3) 熱群において核分裂反応に寄与する、という熱中性子炉の基礎的な物理的メカニズムをより忠実に考慮することが可能となる。実際、世界中で広く用いられている軽水炉においては、炉心解析は一般的にエネルギー2群（高速群および熱群）で行われており、十分な実績を有している。

以下では、エネルギー2群の中性子拡散方程式から出発し、熱群における核分裂

が支配的な熱中性子炉における中性子バランスを説明する四因子公式および六因子公式を導き出す。この過程で、熱中性子炉における中性子バランスについてイメージを掴んでもらえば幸いである。

中性子エネルギー2群の拡散方程式は以下のように与えられる。

$$-D_1\nabla^2\phi_1+\left(\Sigma_{a,1}+\Sigma_{S,1\to2}\right)\phi_1=\Sigma_{S,2\to1}\phi_2+\frac{\chi_1}{k}\left(\nu\Sigma_{f,1}\phi_1+\nu\Sigma_{f,2}\phi_2\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5.74)$$

$$-D_2\nabla^2\phi_2+\left(\Sigma_{a,2}+\Sigma_{S,2\to1}\right)\phi_2=\Sigma_{S,1\to2}\phi_1+\frac{\chi_2}{k}\left(\nu\Sigma_{f,1}\phi_1+\nu\Sigma_{f,2}\phi_2\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5.75)$$

ここで、

D_1, D_2：1群および2群の拡散係数 [m]
$\Sigma_{a,1}, \Sigma_{a,2}$：1群および2群の巨視的吸収断面積 [1/m]
$\Sigma_{s,1\to2}, \Sigma_{s,2\to1}$：1群から2群、2群から1群への巨視的散乱断面積 [1/m]
χ_1, χ_2：1群および2群の核分裂スペクトル（$\chi_1+\chi_2=1$）
ϕ_1, ϕ_2：1群および2群の中性子束 [$m^{-2}\cdot s^{-1}$]

である。

(5.74) 式、(5.75) 式の各項の物理的な意味は以下の通りである。

$-D_1\nabla^2\phi_1, -D_2\nabla^2\phi_2$：1群もしくは2群において、中性子が漏洩により消滅する量
$(\Sigma_{a,1}+\Sigma_{s,1\to2})\,\phi_1$：1群の中性子が吸収もしくは2群への散乱によって1群から消滅する量
$(\Sigma_{a,2}+\Sigma_{s,2\to1})\,\phi_2$：2群の中性子が吸収もしくは1群への散乱によって2群から消滅する量
$\Sigma_{s,2\to1}\phi_2$：2群の中性子が1群に散乱される量
$\Sigma_{s,1\to2}\phi_1$：2：1群の中性子が2群に散乱される量
$\frac{\chi_1}{k}\left(\nu\Sigma_{f,1}\phi_1+\nu\Sigma_{f,2}\phi_2\right), \frac{\chi_2}{k}\left(\nu\Sigma_{f,1}\phi_1+\nu\Sigma_{f,2}\phi_2\right)$：1群もしくは2群に現れる核分裂中性子の量

である。

(5.74) 式、(5.75) 式の中性子漏えい量をバックリングによって表す。

$$-D_1\nabla^2\phi_1=D_1B^2\phi_1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5.76)$$

$$-D_2\nabla^2\phi_2=D_2B^2\phi_2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5.77)$$

(5.76) 式、(5.77) 式に加え、熱中性子炉解析で良く用いられるいくつかの近似を加えると、以下の式が得られる[注5.7]。

$$D_1B^2\phi_1+\left(\Sigma_{a,1}+\Sigma_{S,1\to2}\right)\phi_1=\frac{1}{k}\left(\nu\Sigma_{f,1}\phi_1+\nu\Sigma_{f,2}\phi_2\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5.78)$$

$$D_2B^2\phi_2+\Sigma_{a,2}\phi_2=\Sigma_{s,1\to2}\phi_1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5.79)$$

(5.79) 式より、1群と2群の中性子束の関係を以下のように導くことができる。

$$\phi_2=\frac{\Sigma_{S,1\to2}}{D_2B^2+\Sigma_{a,2}}\phi_1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5.80)$$

(5.80) 式を (5.78) 式に代入することにより、実効増倍率を以下のように求めることができる。

$$k=\frac{\nu\Sigma_{f,1}+\nu\Sigma_{f,2}\dfrac{\Sigma_{S,1\to2}}{D_2B^2+\Sigma_{a,2}}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{S,1\to2}+D_1B^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5.81)$$

注5.7：軽水炉の解析では、2群から1群への上方散乱は小さいとして無視することが多い。また、核分裂中性子はほとんどが高速群で発生するため、$\chi_1=1$、$\chi_2=0$とすることが一般的である。なお、1群と2群の境界は、軽水炉の解析においては0.6eV~1.8eV程度とする場合が多い。黒鉛を減速材に用いた炉心(黒鉛炉)においては、境界を4eV程度とやや高めに設定する。これは、黒鉛による上方散乱が多いためである。

(5.81) 式を物理的に解釈するため、以下のように変形する。

$$k=\eta f p \varepsilon P_F P_T \quad \cdots\cdots (5.82)$$

ここで、

$$\eta = \frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\Sigma_{a,2,F}} \quad \cdots\cdots (5.83)$$

$$f = \frac{\Sigma_{a,2,F}}{\Sigma_{a,2}} \quad \cdots\cdots (5.84)$$

$$p = \frac{\Sigma_{S,1\to 2}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{S,1\to 2}} \quad \cdots\cdots (5.85)$$

$$\varepsilon = \frac{\nu\Sigma_{f,1}+\nu\Sigma_{f,2}\dfrac{\Sigma_{S,1\to 2}}{\Sigma_{a,2}}}{\nu\Sigma_{f,2}\dfrac{\Sigma_{S,1\to 2}}{\Sigma_{a,2}}} \quad \cdots\cdots (5.86)$$

$$P_F = \frac{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{S,1\to 2}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{S,1\to 2}+D_1B^2} \quad \cdots\cdots (5.87)$$

$$P_T = \frac{\nu\Sigma_{f,1}+\nu\Sigma_{f,2}\dfrac{\Sigma_{S,1\to 2}}{\Sigma_{a,2}+D_2B^2}}{\nu\Sigma_{f,1}+\nu\Sigma_{f,2}\dfrac{\Sigma_{S,1\to 2}}{\Sigma_{a,2}}} \approx \frac{\nu\Sigma_{f,2}\dfrac{\Sigma_{S,1\to 2}}{\Sigma_{a,2}+D_2B^2}}{\nu\Sigma_{f,2}\dfrac{\Sigma_{S,1\to 2}}{\Sigma_{a,2}}} = \frac{\Sigma_{a,2}}{\Sigma_{a,2}+D_2B^2} \quad \cdots\cdots (5.88)$$

であり、$\Sigma_{a,2,F}$は2群における燃料の吸収断面積である。なお、(5.88) 式の変形に際しては、2群における核分裂が支配的である ($\nu\Sigma_{f,2} \gg \nu\Sigma_{f,1}$) と仮定した。以下では、(5.82) 式の右辺の各項の意味について議論する。

$\eta=\nu\Sigma_{f,2}\phi_2/\Sigma_{a,2,F}\phi_2$と変形して考えると、$\eta$は燃料に吸収された熱中性子1個あたりに (熱群における) 核分裂で生成される中性子数である。ηは中性子再生率 (もしくはイータ値) と呼ばれる。これについては3.8節にて説明した。

同様に$f=\Sigma_{a,2,F}\phi_2/\Sigma_{a,2}\phi_2$であると考えると、$f$は2群において (燃料・減速材・構造材などに) 吸収された中性子のうち、特に燃料に吸収されたものの割合であると解釈できる。そのためfは**熱中性子利用率** (thermal utilization) と呼ばれる。

pは、1群で吸収されず、2群に減速された中性子の割合であると考えられる。1群においては断面積の共鳴部分での吸収 (共鳴吸収) が支配的であるため、pは**共鳴吸収を逃れる確率** (resonance escape probability：共鳴部分での吸収を逃れて2群に減速される確率) と呼ばれる。

εについては、一般的に$D_2B^2 \ll \Sigma_{a,2}$であり、(5.79) 式から$\phi_2 \approx (\Sigma_{s,2\to 1}/\Sigma_{a,2})\,\phi_1$と近似できることを考慮すると、

$$\varepsilon = \frac{\nu\Sigma_{f,1}+\nu\Sigma_{f,2}\dfrac{\Sigma_{S,1\to 2}}{\Sigma_{a,2}}}{\nu\Sigma_{f,2}\dfrac{\Sigma_{S,1\to 2}}{\Sigma_{a,2}}} = \frac{\nu\Sigma_{f,1}\phi_1+\nu\Sigma_{f,2}\phi_2}{\nu\Sigma_{f,2}\phi_2} \quad \cdots\cdots (5.89)$$

となり、熱群 (2群) の中性子による核分裂で発生した中性子数と全てのエネルギーの中性子による核分裂で発生した中性子数の比率となる。εは**高速核分裂因子** (fast fission factor) と呼ばれ、高速 (1群の) 中性子により、どの程度の核分裂が発生したかの目安となる。ε=1であればすべての核分裂中性子は熱群の中性子によって発生したことになり、高速群の中性子は核分裂に寄与しなかったこととなる。

P_F、P_Tについては、(5.72) 式を参考にすると、P_Fは高速中性子が炉心から漏れない確率、P_Tは熱中性子が炉心から漏れない確率であると解釈できる。

(5.82) 式において、特に$P_F=P_T=1$とした場合の式

$$k_\infty=\eta f p \varepsilon \quad \cdots\cdots (5.90)$$

は右辺に四つの因子があることから**四因子公式** (four factor formula) と呼ばれ、それぞれの因子は原子炉の特性を分析するための有益な指標を与える。また、四因子公式に原子炉からの漏れを考慮した (5.82) 式は**六因子公式** (six factor formula) と呼ばれる。

参考として、^{235}Uが2wt%のウランと水を均質に混合した体系において、無限増倍率およびη、f、p、εを計算したものを図5.4に示す。

ウランと水の原子数比が変わっても中性子再生率ηはあまり変化しない。一方、f、p、εについては大きな依存性が見られる。熱中性子利用率fは、ウランの割合が大きくなるにつれ、1に近づく。これは、体系中の水の割合が相対的に少なくなり、ウランに吸収される熱中性子が増えるためである。

共鳴を逃れる確率pは、図5.4に示すように、ウランの原子数比が大きくなるとともに急速に小さくなる。ウランの原子数比が小さいときには、ほとんどの高速中性子はウラン (特に^{238}U) に共鳴吸収されることなく水素などによって熱群に減速される。ちなみに、水の吸収断面積は高速群では極めて小さい。従って、共鳴を逃れて熱群に減速する確率はほとんど1である。しかし、ウランの原子数比が大きくなると、^{238}Uの共鳴吸収によって吸収される中性子が増加し、pは小さくなっていく。すなわち、熱群に減速される中性子の数は少なくなる。ウランの原子数比が大きくなると、共鳴を逃れる確率が小さくなり、熱群に中性子が減速されにくくなる ($\Sigma_{s,1\to2}/(\Sigma_{s,1\to2}+\Sigma_{a,1})$ が小さくなる) とともに熱群における吸収が大きくなる ($\Sigma_{a,2}$が大きくなる)。

(5.79) 式より、平均自由行程の小さい熱中性子の漏れが無視できる ($D_2B^2=0$) 体系での高速 (1群) 中性子束と熱 (2群) 中性子束の比は、$\phi_1/\phi_2=\Sigma_{a,2}/\Sigma_{s,1\to2}$であることから、ウランの原子数比の増加にともなって高速中性子束と熱中性子束の比は大きくなる。すなわち、高速群の中性子が増え、中性子スペクトルが高エネルギー側にシフトした状態となる。そのため、高速群での核分裂が増えることにより、高速核分裂因子εが大きくなる。

無限増倍率はこれらの掛け合わせであることから、図5.4に示すようにある特定のウラン/水割合で最大値を示すこととなる。ウラン濃度が薄い場合、ウラン濃度を増加させると、熱中性子利用率fおよび高速核分裂率εの増加率が共鳴を逃れる確率pの減少を上回るために無限増倍率は増加する。一方、ウラン濃度がある程度濃い場合、ウラン濃度をさらに増加させると、熱中性子利用率fは飽和状態でほとんど

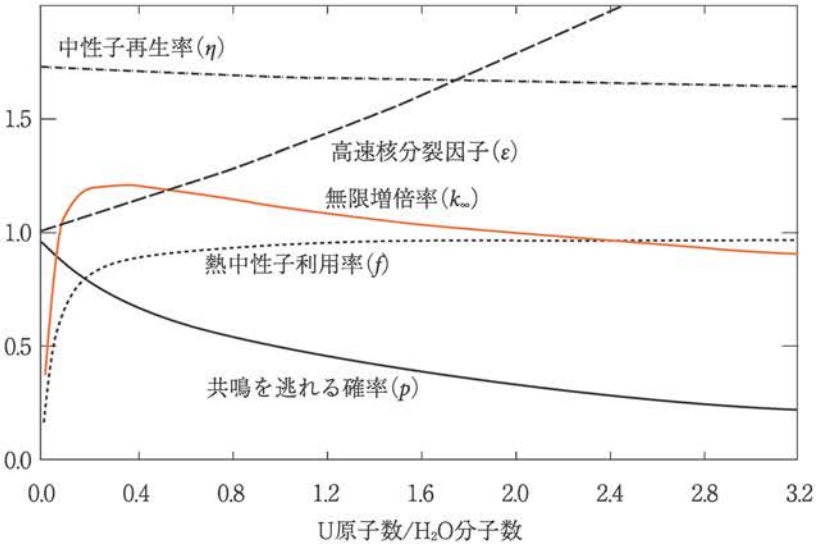

図5.4 2wt%^{235}U濃縮度のウランと水の均質な混合体系における無限増倍率と四因子の変化(室温)

増加しないものの、共鳴を逃れる確率 p は引き続き減少するため、無限増倍率は減少傾向となる。

このように、四因子公式を用いることにより、熱中性子炉における中性子のバランスについて物理的な現象の本質を捉えた議論が可能である。そのため、原子炉の振る舞いを考察する際には、炉心内の中性子バランスを（5.90）式の四因子公式の形で整理してみることは有用である。

最後に、高速群および熱群の合計の中性子漏えい量を簡易に見積もる方法について検討する。（5.87）式、（5.88）式より、高速群からも熱群からも中性子が漏れない確率は、

$$
\begin{aligned}
P_F P_T &= \frac{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{S,1\to 2}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{S,1\to 2}+D_1B^2}\frac{\Sigma_{a,2}}{\Sigma_{a,2}+D_2B^2} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{D_1}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{S,1\to 2}}B^2}\frac{1}{1+\dfrac{D_2}{\Sigma_{a,2}}B^2} \\
&\approx \frac{1}{1+(L_1^2+L_2^2)B^2} \\
&= \frac{1}{1+M^2B^2}
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots (5.91)
$$

ここで、

$$L_1^2 = \frac{D_1}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{S,1\to 2}} \qquad \cdots\cdots (5.92)$$

$$L_2^2 = \frac{D_2}{\Sigma_{a,2}} \qquad \cdots\cdots (5.93)$$

$$M^2 = L_1^2 + L_2^2 \qquad \cdots\cdots (5.94)$$

である。また、（5.91）式導出時には、$L_1^2B^2L_2^2B^2 \approx 0$ とした。

さて、中性子1群の計算においては、中性子が漏れない確率は、（5.72）式より、

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_a+DB^2} = \frac{1}{1+L^2B^2} \qquad \cdots\cdots (5.95)$$

であった。（5.95）式と中性子エネルギー2群から導かれた（5.91）式の類似性は明らかである。実際、（5.91）式は、（5.95）式において、$L^2=M^2$ としたものである。（5.94）式で定義される M^2 は**移動面積**（migration area）と呼ばれ、単位は［m^2］である。（5.94）式から分かるように、移動面積は、高速群と熱群の拡散距離の2乗を足しあわせた形となっている。

移動面積は、BWRの炉心解析などで使用されている。移動面積を使用すると、実効増倍率は、

$$k_{eff} = \frac{k_\infty}{1+M^2B^2} \qquad \cdots\cdots (5.96)$$

と表すことが可能である。従って、バックリングと移動面積が評価できれば、無限増倍率から実効増倍率が算出可能となる。すなわち、k_{eff} と k_∞ から中性子漏れ量の簡易評価が可能となる。

5.8 臨界方程式の応用

本節では、臨界方程式を応用した計算をいくつか行うことにより、臨界方程式の物理的なイメージをふくらませることにしよう。

〈例題5.5〉臨界寸法の計算

典型的なPWR炉心における炉心平均の一群巨視的断面積を以下のように与える。

Σ_a=2.23 [1/m]

$\nu\Sigma_f$=2.33 [1/m]

D=0.013 [m]

原子炉が平板状もしくは立方体であると仮定したとき、原子炉が臨界になる寸法を計算せよ。

〈解答5.5〉

まず、原子炉が平板状であると仮定したとき、臨界になる厚さを計算する。

(5.70) 式に$\nu\Sigma_f$、Σ_a、Dを代入し、B^2を求める。

$$B^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} = \frac{2.33 - 2.23}{0.013} = 7.69[1/\mathrm{m}^2] \quad \cdots\cdots (5.97)$$

平板状原子炉のバックリング (5.36) 式を用いると、

$$B^2 = 7.69 = \left(\frac{\pi}{\mathrm{H}}\right)^2 \quad \cdots\cdots (5.98)$$

従って、

H=1.13 [m]

となる。また、原子炉を立方体と仮定したとき、臨界となる寸法は、直方体のバックリング (5.65) 式を用いると、

$$B^2 = 7.69 = 3\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \quad \cdots\cdots (5.99)$$

これより、

H=1.96 [m]

となる。

〈例題5.6〉PWRにおける径方向および軸方向中性子漏れ量の評価

PWRの4ループ炉心（110万kW級）においては、燃料集合体は193体装荷されている。燃料一体の寸法は、径方向が約0.215m×0.215m、軸方向が約3.60mである。炉心を有限円柱体系で近似したとき、半径方向および軸方向からの中性子の漏れ量が実効増倍率に与える影響を評価せよ。

なお、炉心の巨視的断面積は例題5.5と同じであるとする。

〈解答5.6〉

炉心を有限円柱体系で近似すると、

$$\text{径方向半径} = \sqrt{\frac{193 \times 0.215 \times 0.215}{\pi}} = 1.685 \text{ [m]}$$

軸方向長さ=3.60[m]

(5.55) 式より、径方向および軸方向のバックリングは

$$B_r^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 = \left(\frac{2.405}{1.685}\right)^2 = 2.04 \ [1/\mathrm{m}^2]$$

$$B_z^2 = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{3.60}\right)^2 = 7.61 \times 10^{-1} \ [1/\mathrm{m}^2]$$

（5.19）式より、漏れがない、つまり、バックリングが零の体系では、例題5.5と同じ巨視的断面積を仮定すると、

$$k_\infty = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} = \frac{2.33}{2.23 + 0.013 \times 0} = 1.0448 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.100)$$

径方向の中性子の漏れのみを考慮すると、

$$k_{eff}^{radial} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB_r^2} = \frac{2.33}{2.23 + 0.013 \times 2.04} = 1.0326 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.101)$$

軸方向の中性子の漏れのみを考慮すると、

$$k_{eff}^{axial} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB_z^2} = \frac{2.33}{2.23 + 0.013 \times 7.61 \times 10^{-1}} = 1.0402 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.102)$$

これより、径方向の中性子漏れは

$$k_\infty - k_{eff}^{radial} = 1.0448 - 1.0326 = 0.0122 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.103)$$

軸方向の中性子漏れは

$$k_\infty - k_{eff}^{axial} = 1.0448 - 1.0402 = 0.0046 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.104)$$

（5.103）および（5.104）の比較により、径方向の中性子漏れが炉心の実効増倍率に及ぼす影響は、軸方向に比べて3倍弱になることがわかる。なお、典型的なPWRにおいては、1か月間の運転で炉心の実効増倍率は約0.01減少する。このことから、中性子の漏れが炉心の実効増倍率に与える影響は大型炉心といえども無視できないことがわかる。

〈例題5.7〉 円柱形炉心における最適径方向/軸方向長さ
円柱形原子炉におけるバックリングは（5.55）式から

$$B^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

であるから、ある特定の漏れ量（バックリング）となる原子炉の形状、つまり半径Rと高さHの組み合わせは無数にある。では、最も効率よく、言い換えると小さい体積で、原子炉を臨界にしたい場合、どのような形状にするのが得策であろうか?

〈解答5.7〉
（5.55）式をR^2に関して解くと以下のようになる。

$$R^2 = \frac{(2.405)^2}{B^2 - \pi^2/H^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.105)$$

（5.105）式を、円柱（つまり原子炉の）体積を与える式に代入する。

$$V = \pi R^2 H = \frac{\pi(2.405)^2 H}{B^2 - \pi^2/H^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.106)$$

Vが最小となるHの値を求めるため、（5.106）式をHで微分しその結果を零とする。これより、

$$H = \frac{\pi\sqrt{3}}{B} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.107)$$

さらに（5.105）式より、

$$R = \frac{2.405}{B}\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \cdots\cdots (5.108)$$

となる。(5.107)、(5.108) より、半径と高さの比は、

$$\frac{R}{H} = 0.54 \quad \cdots\cdots (5.109)$$

となる。つまり直径と高さがほぼ等しい時に、体積が最も小さくなる結果となる。これは、中性子の漏れが表面積に比例することを考えると、妥当な結果と考えられる。ちなみに、PWRでは、半径と高さの比はおおむね以下のようになっている（10.2節にPWRプラントの詳細な説明がある）。

従来型PWR（電気出力58万kW、集合体121体）…… R/H～0.37
従来型PWR（電気出力89万kW、集合体157体）…… R/H～0.42
従来型PWR（電気出力118万kW、集合体193体）…… R/H～0.47
Advanced PWR（電気出力154万kW、集合体257体）…… R/H～0.54

単純に炉心形状のみから考えると、APWRが最も (5.109) 式に近い形となっている。

5.9 原子炉の実効増倍率と反射体

5.9.1 反射体と反射体節約

前節まで臨界方程式を用いて原子炉の臨界について考察してきた。前節までの解析においては、いくつかの代表的な形状においてバックリングを算出し、そのバックリングに基づいて実効増倍率を評価した。バックリングを評価する際には、原子炉の表面で中性子束が零になる境界条件（中性子束零境界条件）を用いた。これは、主として解析上の取り扱いの簡略化のためである。たとえば、原子炉表面で真空境界条件を用いることも可能であるが、バックリングを解析的に求めることは困難になる。

実際の原子炉においては、炉心内で中性子を効果的に使用するため、炉心の外周部に反射体を設置している。第４章で議論したように、反射体を設置することで炉心から漏れ出てくる中性子を炉心に「反射し」、炉心からの中性子の漏れ量を低減することが可能である。中性子反射体としては、吸収が少なく、中性子拡散係数が小さい材質が好ましい。すなわち、全断面積が大きく、散乱が大きい物質が反射体として適切である。

軽水はこのような性質を満たしているため、商業用軽水炉では軽水が反射体として用いられることが一般的である[注5.8]。また、研究用原子炉においては重水や黒鉛が反射体として用いられることも多い。これらの物質は特に中性子の吸収が少ないことから、移動面積が大きくなり、反射体として優れた性質を持つ。さらに、重量をできるだけ低減する必要がある宇宙用原子炉では、軽量なベリリウムが反射体として用いられることもある。

原子炉からの中性子の漏洩は、飛行の平均自由行程が大きい高速エネルギー領域が支配的である。軽水は、高速中性子に対する巨視的全断面積がそれほど大きくないため、APWR（改良型加圧水型軽水炉）では中性子反射の効果をさらに高めるために反射体としてステンレススチールのブロックを用いている。ステンレススチールは、高速中性子に対する全断面積と散乱断面積が軽水に比べて大きいため、炉心からの中性子の漏洩をさらに低減することが可能となる。

図5.5にPWRに対して軽水のみからなる反射体、現行の炉心で実際に用いられているステンレス板+軽水反射体、ステンレス反射体を用いた場合の計算結果を示す。これより、反射体としてステンレススチールを用いることにより、炉心からの中性子の漏れを抑制し、実効増倍率を増加させることが可能になることが分かる。なお、ステンレス板+軽水反射体を用いた場合、炉心の実効増倍率が低くなっている。これは、ステンレス板が薄い（約2cm）ため、高速中性子を十分に反射できない一方、ステンレス板は軽水に比べて熱中性子の吸収が多いため、炉心外への中性子の漏れ量が合

注5.8：第６章で学ぶが、軽水に含まれている水素と中性子が散乱反応を起こしたとき、中性子は進行方向の前方に偏って散乱される（前方散乱）。そのため、軽水を反射体にすると、中性子が軽水内で前方散乱を繰り返して体系外に漏れ出しやすいのではないかと思われるかもしれない。実際、前方散乱が大きい場合、一次の巨視的非等方散乱断面積が大きくなり、(4.15) 式から拡散係数が大きくなる。拡散係数が大きいということは、中性子がそれだけ拡散しやすいということであるため、前方散乱が大きい場合には、確かに中性子が炉心から反射体を通じて漏えいしやすくなると言える。軽水の場合、前方散乱の効果を差し引いても反射体として優秀、ということである。なお、反射体から炉心に戻ってくる中性子は、一般に反射体内で多数回の散乱を繰り返しており、元の入射方向（炉心→反射体）を「忘れている」と考えてよい。

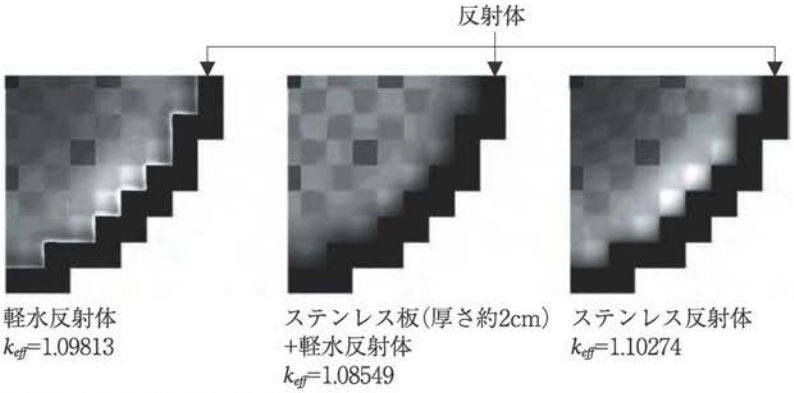

図5.5 PWRにおける反射体効果

計では増加することによる。ステンレスのみの反射体を用いた場合に実効増倍率が大きくなっているのは、高速中性子の反射効果による反応度増加が熱中性子吸収による反応度低下を上回っていることを示している。

上述のように、原子炉の周囲に反射体を設置することにより、原子炉からの中性子漏洩を低減させ、原子炉の実効増倍率を増加させることが可能である。そのため、原子炉の設計においては反射体の取り扱いは重要となる。しかしながら、反射体を設置することにより、原子炉（の炉心）表面において中性子束が零となる境界条件を適用することができなくなる。

反射体の効果は「炉心から漏洩してくる中性子を反射し、炉心の実効増倍率を大きくする」ものである。すなわち、反射体をつけることは、「炉心のサイズを大きくし、炉心からの中性子漏洩量を減少させる」のと同じような効果をもたらしているものと見ることも可能である。このような考え方に基づいて使われている概念が**反射体節約**（reflector saving）である。まず、反射体を設置した場合の炉心の実効増倍率を評価する。次に反射体がない場合の炉心の実効増倍率が、反射体を設置した場合のものと同じになるように炉心のサイズを決定する。この場合の炉心のサイズは、反射体付きのものと比べて大きくなることが予想される。この炉心サイズの差は、反射体が存在することにより「節約」することができたとも解釈可能であるため、反射体節約と呼ばれる。

5.9.2 臨界事故と反射体

上記のように、反射体は原子炉の臨界（連鎖反応の維持）に対して重要な役割を果たしている。そのため、意図しない臨界、すなわち臨界事故においても決定的な役割を果たすことがある。

1999年9月に発生したJCO臨界事故（序章2参照）は、規定を遙かに上回る量の硝酸ウラニル水溶液（^{235}U濃縮度18.8%）を沈殿槽に投入したことが原因となり発生した。臨界事故が発生した沈殿槽の垂直断面図を図5.6に示す。この沈殿槽は、除熱のために、周囲に冷却水を流すジャケットを巻いた構造となっている。

臨界事故発生時、沈殿槽の中に硝酸ウラニル溶液を6〜7リットルずつ順次投入する作業を行っており、最終的には約45リットルの水溶液が沈殿槽に投入された。このときの体系の実効増倍率は、様々な不確定要因はあるものの1.012〜1.024と推定されており、即発臨界状態であったと推定されている[注5.9]。臨界方程式の観点からこの経過を見ると、溶液の量が多くなるにつれ、体系からの中性子漏えい量が少なくなり（バックリングが小さくなり）、最終的に臨界を超過したものと考えられる。

この作業は、以前は直径175mmの貯塔と呼ばれる容器を用いて行われていた。貯塔の直径は、沈殿槽の直径(450mm)に比べて大幅に小さかったことから、中性子の漏えい量が大きく(バックリングが大きく)、同じ作業を行っても臨界になることはなかった。直径方向の中性子漏えい量は、直径方向のバックリングに比例する(すなわち、直径の2乗に反比例する)。したがって、貯塔と沈殿槽の直径方向の中性子漏えい量は大雑把に見積もって$(450/175)^2$〜6.6倍の違いがあったと計算できる、なお、実際には、沈殿槽には反射体の効果をもつ冷却水ジャケットが存在していたため、中性子の漏えい量の差はさらに大きかったものと推察できる。

注5.9：原子炉の実効増倍率がある値を超えると、ごく短時間に出力が急上昇する即発臨界状態になる。本体系では、実効増倍率が約1.008を超えると即発臨界状態になったものと推定されている。即発臨界については、第7章の原子炉の動特性において詳細に述べる。なお、遅発中性子の寄与がないと臨界を維持できない場合を遅発臨界と呼ぶことがある。また、即発臨界を越える反応度が添加された状態のことを即発超臨界と呼ぶことがある。

臨界到達後、温度上昇や水の放射線分解によるボイドの発生などの影響により、体系には臨界超過量に対応する負の反応度が加わり、ある出力レベルで定常的に核分裂の連鎖反応が続く状態になった(注5.10)。

臨界事故を早期に終息させるためには、体系を未臨界にする必要がある。(5.96)式より明らかなように、体系の実効増倍率を小さくするためには、無限増倍率k_∞を小さくするか、中性子の漏れ量を大きくする（B^2を大きくする）ことが必要である。当時の対策本部では、この基本方針にのっとり、①中性子吸収材（ほう素）の注入、②冷却用ジャケット内の冷却水の抜き取り、という対応方針を定めた。①については、中性子の吸収材であるほう素を沈殿槽に直接投入することで、体系の吸収断面積を大きくし、体系を未臨界に導こうとするものであった。一方、②については、体系の外周を取り巻いている水を抜くことで反射体の効果を喪失させ、体系を未臨界に導くことを目的とするものであった。

さて、①の対策をとるためには、沈殿槽に近寄る必要がある。臨界状態が継続している状態で、このような作業は被ばく量の観点から困難であると考えられた。そのため、②の作業が優先して行われた。まず、②の作業が臨界事故終息に有効であるかどうかを確認するため、冷却水ジャケット（厚さ約2.2cm）の反射体効果について簡易な解析が行われた。この解析においては、図5.6の沈殿槽は二次元円柱座標系で簡易に模擬された。解析の結果、冷却水ジャケットの水を抜くことは、約4%Δk/kの負の反応度効果があることが明らかになった。すなわち、冷却水ジャケットという「反射体」は、厚さこそ約2.2cmと薄いものの、体系の増倍率を約4%Δk/k上昇させる効果があったことになる(注5.11)。水抜きによってこの反射体効果を失わせることは、

注5.10：原子炉は、体系の温度が上昇すると、体系を構成する物質の原子数密度の変化、微視的断面積の変化などから、実効増倍率が変化する。このような原子炉内の温度変化に対する実効増倍率の変化を反応度フィードバック係数と呼ぶ。詳細については、第8章で述べる。

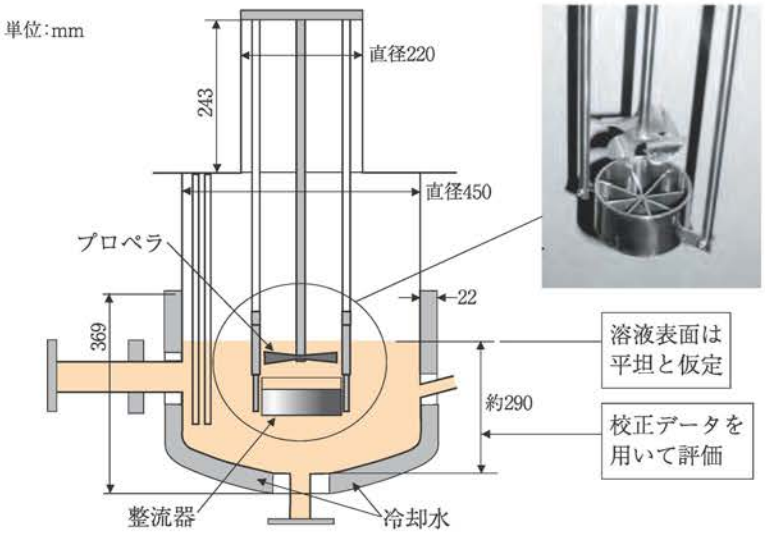

図5.6 沈殿槽の垂直断面図（計算モデル）

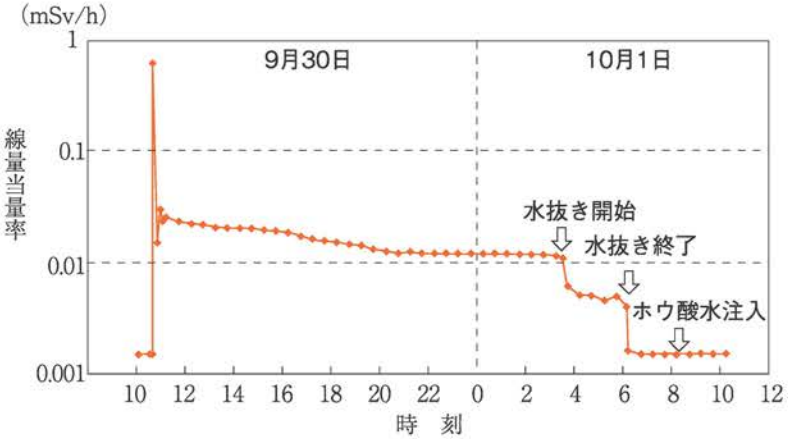

図5.7 沈殿槽近くに設置されたガンマ線モニタの指示値
「JCO臨界事故 その全貌の解明 事実・要因・対応」日本原子力学会JCO事故調査委員会、東海大学出版、p.75、(2005)

臨界事故終息のために十分な負の反応度効果であると判断されたことから、この作業が実行に移され、実際に臨界事故を終息に至らせた(注5.12)。

このように緊急時には詳細な解析を行う時間的余裕はなく、原子炉物理の基礎に基づいた工学的な判断が重要になる。

5.10 まとめ

本章では、核分裂中性子源が存在する場合の拡散方程式の解析解および臨界方程式の導出とその応用について述べた。

核分裂中性子源が存在する場合、拡散方程式の解法は中性子源が存在する場合と全く異なるものとなり、実効増倍率という新たなパラメータを導入する必要がある。本章では、実効増倍率の計算方法について、いくつかの単純な体系における計算例を示した。また、原子炉内の中性子のバランスを概略評価するためによく用いられる四因子公式および六因子公式の導出について述べた。また、臨界方程式の一つの応用例として、JCO臨界事故の経過を炉物理的な側面から簡単に述べた。

本章の知識を用いることにより、原子炉のキーパラメータである実効増倍率と中性子束分布について評価することが可能となる。

注5.11：人間の体はその大部分が水である。従って、人間が反射体のない「裸の原子炉」に抱きつくと人間の体が反射体として働き、体系が臨界になる可能性がある。太っている人の方が反射体効果が大きいと推察されることから、このような「人間が反射体になる」効果はファットマン効果と呼ばれている。過去に実際にファットマン効果による臨界事故が発生している。

注5.12：図5.7は、当該体系の近くに設置されたガンマ線モニターの指示値の推移を臨界事故発生から終息に至るまで示したものである。臨界事故発生時(9月30日午前10時過ぎ)、パルス状にガンマ線の指示値が増大し、その後、定常状態となり、臨界状態が継続していることが示唆されている。10月1日午前4時前に冷却水ジャケットの水抜き作業が開始され、午前6時の水抜き終了時点でガンマ線の指示値が大幅に低下し、臨界事故が終息したことを示している。なお、水の大部分は、午前6時前に一気に抜けている。冷却水ジャケットの水抜きは、沈殿槽に接近せずに行えたため、作業時の過度の被ばくはなかったと報告されている。

《演習問題》

[1] 以下に二つの拡散方程式がある。

$$-D\nabla^2\phi+\Sigma_a\phi=S \quad \cdots\cdots (1)$$

$$-D\nabla^2\phi+\Sigma_a\phi=\frac{1}{k}\nu\Sigma_f\phi \quad \cdots\cdots (2)$$

① (1) 式と (2) 式の違いについて説明せよ。この際、これらの式は、主としてどのような用途に使われるかに着目せよ。
② (2) 式の各項 (左辺二つ、右辺一つ) の物理的意味をそれぞれ説明せよ。
③ (2) 式の右辺に現れるkの意味を説明せよ。

[2] ある燃料集合体が水中に存在している。燃料集合体の寸法は、縦×横×高さ=0.1×0.1×3.0[m]であるとする。集合体平均の巨視的核分裂断面積を50.0[1/m]、巨視的吸収断面積を100.0[1/m]、核分裂あたりの中性子発生数を2.5、拡散係数を0.05[m]とする。以下の計算にあたっては、水の存在による外挿距離を無視し、零中性子束境界条件を適用せよ。
(1) 燃料集合体一体の実効増倍率を求めよ。
(2) 燃料集合体が一列に隙間なく並んだ場合、燃料集合体の体数と実効増倍率の関係を求めよ。
(3) 体系を臨界にするために必要な最小の燃料集合体体数を求めよ。

[3] ある均質な原子炉を考える。この原子炉の炉心は、^{239}Pu、^{1}H、^{10}Bから構成されていると仮定する。^{239}Pu、^{1}H、^{10}Bの微視的吸収断面積をそれぞれ1000 (barn)、0.1 (barn)、500 (barn)、微視的核分裂断面積を700 (barn)、0 (barn)、0 (barn) とする。また、^{239}Pu、^{1}H、^{10}Bの原子数密度をそれぞれ$5\times10^{+25}$[1/m^3]、$6\times10^{+28}$[1/m^3]、x[1/m^3]とする。
①$x=1.0\times10^{+26}$[1/m^3]とするとき、この原子炉の炉心の巨視的吸収断面積、巨視的核分裂断面積を求めよ。
②①の結果から無限増倍率を計算せよ。ただし、^{239}Puの核分裂あたりの中性子放出数νを3とする。
③^{10}Bの原子数密度xを調整してこの原子炉の無限増倍率が1.05となるようにした。この場合、xの値はいくらになるか。
④③の条件で、原子炉がちょうど臨界となる寸法を求めよ。なお、この原子炉の拡散係数を0.05[m]とし、原子炉の形状は立方体と仮定する。また、外挿距離を無視せよ。

[4] 以下に二つの拡散方程式がある。

$$-D_1\nabla^2\phi_1+\left(\Sigma_{a,1}+\Sigma_{s,1\to2}\right)=\frac{\chi_1}{k}\left(\nu\Sigma_{f,1}\phi_1+\nu\Sigma_{f,2}\phi_2\right)+\Sigma_{s,2\to1}\phi_2 \cdots\cdots (1)$$

$$-D_2\nabla^2\phi_2+\left(\Sigma_{a,2}+\Sigma_{s,2\to1}\right)=\frac{\chi_2}{k}\left(\nu\Sigma_{f,1}\phi_1+\nu\Sigma_{f,2}\phi_2\right)+\Sigma_{s,1\to2}\phi_1 \cdots\cdots (2)$$

① (1) 式の各項の物理的意味を説明せよ。
② (1)、(2) 式の右辺に現れるkの物理的意味を説明せよ。
③無限に大きく、かつ均質な原子炉 (つまり、中性子束が空間的に変化しない原子炉) を考える。この条件の下でkを求めよ (kを巨視的断面積などで表せ)。

[5] 3群の拡散方程式を考える。
①3群の拡散方程式を書け。ただし、外部中性子源は存在しないものとする。(核分裂による中性子源のみが存在する)
②第2群目の拡散方程式について、各項の物理的意味を説明せよ。
③下記の仮定を用いるとき、第1群と第2群および第1群と第3群の中性子束の比を

断面積によって表せ。
・核分裂中性子は第1群のみに現れる。
・第1群から第3群へ直接減速（移動）する中性子は無視する。
・上方散乱（第3群から第2群もしくは第1群へ、第2群から第1群への中性子の移動）は無視する。
・空間依存性は無視する。（中性子の漏れは零とする）
・第1群および第2群における核分裂断面積は零とする。
④上記の仮定を用いるとき、増倍率を断面積によって表せ。

[6] 例題5.1で扱った原子炉が1MW/m^{3}の出力密度で運転している場合の中性子束の値を求めよ。なお、1核分裂当たりの放出エネルギーは200MeVとする。

[7] 例題5.1で述べた原子炉を考える。
①この原子炉が球形状および円柱形状（ただし、直径=高さとする）である場合、この原子炉がちょうど臨界になるための一辺の大きさを求めよ。なお、拡散係数を0.05[m]とし、外挿距離を0とする（原子炉表面で中性子束が0になるとする）。
②この原子炉が立方体形状である場合については、例題5.2で考察した。(1) の結果とあわせ、体積が最も小さくなるのはどのケースか。物理的な理由とあわせて述べよ。
③球形状、円柱形状および立方体形状の原子炉が100MWで運転を行っていたとする。この場合の各形状の原子炉の中性子束の平均値および最大値を求めよ。なお、一核分裂当たりの放出エネルギーは200MeVとする。
④③の場合の出力密度の平均値および最大値を求めよ。

[8] 再処理工場などでは、臨界管理が非常に重要である。ある燃料と減速材を混合した溶液が半径Rの球状で臨界になるとする。この溶液を半径rの管で移送するとき、臨界にならないRに対するrの寸法比(r/R)の最大のものは次の値のうちどれか。ただし、球と無限に長い円柱の形状バックリングは、それぞれ$(\pi/R)^2$、$(2.40/r)^2$である。
①0.5　②0.6　③0.7　④0.8　⑤0.9
（出典：技術士 原子力・放射線部門 平成19年度 第一次試験）

[9] 大きな裸の原子炉の実効増倍率kは、無限大体系の増倍率k_∞、移動面積M^2、バックリングB^2を用いて、次式で与えられる。

$$k = \frac{k_\infty}{1 + M^2 B^2}$$

半径Rの球体系にウラン溶液を満たした場合にちょうど臨界であった。この時のバックリングは$\left(\frac{\pi}{R}\right)^2$で表される。このウラン溶液の全量を球と同体積の一辺aの立方体系に移した。
次の記述のうち正しいものはどれか。なお、半径Rおよび立方体の一辺aに比べて、外挿距離は小さいとして無視する。

①立方体のバックリングは$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$であり、立方体系は未臨界となる。

②立方体のバックリングは$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$であり、立方体系は超臨界となる。

③立方体のバックリングは$3\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$であり、立方体系は超臨界となる。

④立方体のバックリングは$3\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$であり、立方体系は未臨界となる。

⑤立方体のバックリングは$3\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$であり、立方体系は臨界のままである。

（出典：技術士 原子力・放射線部門 平成17年度 第一次試験）