
第4章

中性子の拡散

1. はじめに
 2. 中性子拡散方程式の発見的導出
 3. 拡散方程式の解
 4. 多群拡散方程式
 5. 数値解法
 6. まとめ
-

[この章のポイント]

濃いガスが薄いガス中に拡散していく現象に類似している中性子の振る舞いを用いて、ボルツマンの中性子輸送方程式を単純化する。拡散現象に基づいた近似を用いていることから、このようにして導かれた方程式を中性子拡散方程式と呼ぶ。いくつかの単純な条件において拡散方程式を解析的に解き、中性子束の空間分布の計算を実際に行う。一方、実際の原子炉の中には、様々なエネルギーを持った中性子が存在する。このような多様なエネルギーを持つ中性子をグループに分けて取り扱うのが多群拡散方程式である。一般的な条件で多群中性子拡散方程式の解を解析的に求めることは難しいため、コンピュータを用いたシミュレーションにより数値的に中性子の振る舞いを計算する。

第4章 中性子の拡散 (拡散理論)

4.1 はじめに

原子炉物理の大きな目的の一つは、原子炉内の発熱分布や燃料の臨界量などの炉心性能を精度よく予測することである。第3章までに学んできたように、発熱量分布など原子炉の巨視的 (マクロ) な振る舞い (図4.1) は、結局のところ、原子炉内における原子核と中性子という極めて微視的 (ミクロ) な反応の積み重ねで決まる。

第2章で学んだように、物質と中性子の相互作用の大小は、①中性子束、②原子炉内の物質に含まれている元素の原子数密度および③中性子に対する原子核の反応断面積によって決まる。

一般の原子炉の設計においては、炉心に配置する燃料などの物質組成 (各元素の原子数密度) は既知 (あるいは、入力値) であり、また、炉心内に存在する様々な元素の中性子反応断面積についても実験データから得られた値を使用することができるため、やはり既知である。

以上のことから、原子炉炉心の振る舞いを正確に把握するためには、原子炉内の中性子束の空間分布とエネルギー分布を正確に計算する必要がある。

この章では、原子炉内での中性子束の空間分布の計算方法の基礎について述べる。なお、中性子束のエネルギー分布の取り扱いについては、第6章で説明する。

原子炉内において、中性子は核分裂によって発生し、散乱を繰り返しながら原子炉内を動き回り、最終的には原子炉の外に漏れ出るか、物質に吸収されてその一生を終える。

より詳細に見ると、ある特定の位置にあり、ある特定のエネルギーを持ってある特定の方向に飛行していた中性子は、しばらく時間が経過すると、散乱などの影響によって別の場所に別のエネルギーかつ別の飛行方向を持って現れる。これは、ビリヤードにおいて、手玉が的玉に衝突しながら運動する際、位置、速度および進行方向が時々刻々変化することをイメージすればわかりやすい。

このような現象 (ある中性子が当初の位置・エネルギー・方向から、別の位置・エネルギー・方向に変化) は輸送現象と呼ばれ、これを研究の対象として取り扱う学問分野が**輸送理論** (transport theory) と呼ばれるものである。実は、中性子の輸送現象は原理的には比較的簡単であり、中性子の輸送現象を厳密に記述する方程式は**ボルツマンの輸送方程式** (Boltzmann transport equation) として既に知られている。

つまり、原子炉内における中性子の振る舞いは、ボルツマンの輸送方程式によって厳密に予測することが原理的には可能である。従って、ボルツマンの輸送方程式を近似することなく、そのまま正確に解くことができれば、原子炉の性能を的確に予測できることとなる。もしも、ボルツマンの輸送方程式を正確かつ簡易に解くことが可能であれば、原子炉物理学は、もう少し簡単なものになっていたに違いない。

しかし、原子炉物理で扱うボルツマンの輸送方程式は、中性子の位置 (3変数)、エネルギー (1変数)、方向 (2変数) および時間 (1変数) の合計7変数が密接に関連



ルドヴィッヒ・ボルツマン
原子炉物理

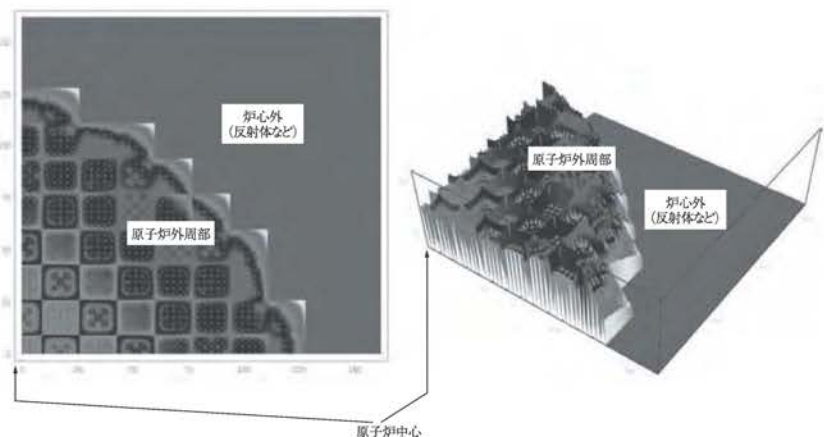


図4.1 PWR炉心における発熱量分布の一例 (炉心を二次元体系で近似した計算例で、炉心全体の1/4、第一象限のみを表示している)

した形の方程式であり、原子炉炉心のような大型で複雑な体系に対して短時間で正確な解を求めることは困難である^(注4.1)。実際、ボルツマンの輸送方程式をより正確に解く方法については、1940年代の原子炉物理学の創生期から大きな研究テーマの一つであり、現在もなお、様々な研究が精力的になされている状況である。

注4.1: 直感的には「中性子の飛行方向も3方向では」と考えられるかもしれない。しかし、飛行方向は「方位角」と「仰角」の2つで表すことができる。このため飛行方向は3変数にならない。

以上のことから、一般の原子炉の解析においては、ボルツマンの輸送方程式に近似を加えることにより、解きやすい形にした方程式を使用することが多い。このように近似を加えることで解きやすい形にした輸送理論の一つが**拡散理論** (diffusion theory) である。

第4章、第5章においては、この拡散理論に基づいて中性子束の空間分布を求めること、また、得られた中性子束の空間分布を元に増倍率などの原子炉の特性を計算することが主な目標である。なお、拡散理論は近似を加えることにより、解きやすくなっているものの、4.2.3節で説明するように、場合によってはその適用性に限界があることに注意する必要がある。

拡散理論は、非常におおざっぱに言うと、中性子の飛行方向を近似的に取り扱うものである。輸送理論では個々の中性子の飛行方向を厳密に考慮するが、拡散理論では、原子炉内の中性子の集団をガスのようなものとしてイメージし、中性子の密度が高いところから、低いところに流れるとして方程式 (中性子拡散方程式) を導き、中性子が集団としてどのように移動するか (分布するか) について計算を行う。

なお、拡散理論は、原子炉物理のみで用いられているものではなく、熱伝導方程式など他の工学分野においても広く用いられている。

第4章で学ぶ**中性子拡散方程式** (neutron diffusion equation: 中性子拡散理論) を用いてできることは以下の通りである。

- (1) 原子炉内の中性子束分布の予測
- (2) 原子炉内の反応率分布の予測 (熱出力、材料の中性子照射量などの予測)
- (3) 原子炉の臨界量の予測
- (4) 原子炉の実効増倍率の予測

第4章では(1)を主として取り扱い、(2)～(4)については、第5章で取り扱う。

4.2 中性子拡散方程式の発見的導出

ボルツマンの輸送方程式から中性子拡散方程式を「厳密に」導出するためには、ボルツマンの輸送方程式自体の説明、中性子束の角度分布に関する取り扱い (量子力学で用いられる球面調和関数による展開) などの数学的にやや煩雑な処理が必要となり、本書の範囲を超える。そこで、中性子拡散方程式の「厳密」な導出については、参考文献¹⁾に譲ることとして、ここでは、中性子拡散方程式を「発見的に」導出することとする。

4.2.1 連続の式

ある物質中に任意の体積Vを考える。体積V内の中性子の数は、以下の理由により時々刻々変化する (図4.2)。

・Vへの流入

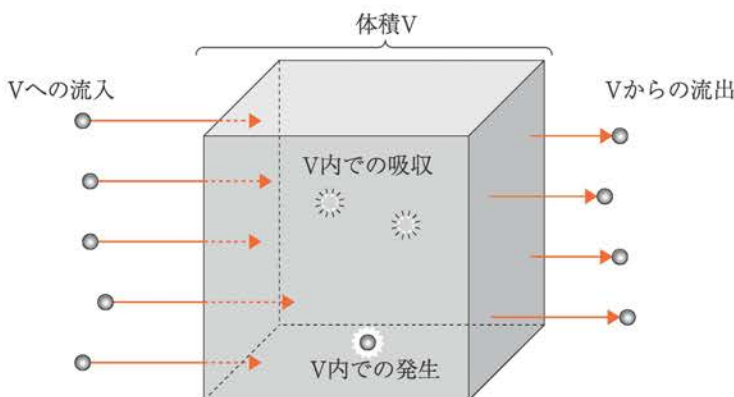


図4.2 連続の式 の概念

- ・Vからの流出
- ・V内での吸収
- ・V内での発生

従って、体積V内での中性子数の変化は、(4.1) 式で与えられる。

$$[\text{変化率}] = [\text{発生率}] + [\text{流入率}] - [\text{吸収率}] - [\text{流出率}] \dots\dots\dots (4.1)$$

(4.1) 式の項を入れ替えると

$$[\text{変化率}] = [\text{発生率}] - [\text{吸収率}] - ([\text{流出率}] - [\text{流入率}]) \dots (4.2)$$

流出率から流入率を差し引いたものは正味の流出率 (漏えい率) と呼ばれる。従って、(4.2) 式は、最終的に (4.3) 式に変形することができる。

$$[\text{変化率}] = [\text{発生率}] - [\text{吸収率}] - [\text{正味の流出率 (漏えい率)}] (4.3)$$

(4.3) 式を**連続の式** (continuity equation) と呼ぶ。以降、(4.3) 式の各項を数式で表すこととする。

まず体積V内での中性子の総数の変化率 [1/sec] は、中性子密度nを体積V内で積分し、得られた体積V内での中性子の総数を時間で偏微分することにより得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V n(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \int_V \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathbf{r} \dots\dots\dots (4.4)$$

ここで、

- $n(\mathbf{r}, t)$: 位置 \mathbf{r} 、時間 t における中性子密度 [1/m³]
- V : Vの体積 [m³]

中性子の発生率 [1/s] は、

$$\int_V S(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \dots\dots\dots (4.5)$$

ここで、

$S(\mathbf{r}, t)$: 位置 \mathbf{r} 、時間 t における**中性子源** (neutron source) 密度 [m⁻³・s⁻¹]

第2章より、単位体積・単位時間あたりでの中性子の吸収率 [m⁻³・s⁻¹] は、巨視的吸収断面積 Σ_a [1/m] と中性子束 ϕ [m⁻²・s⁻¹] の積によって計算される。従って、体積V内での中性子の吸収率 [1/s] は、

$$\int_V \Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \dots\dots\dots (4.6)$$

ここで、

- $\Sigma_a(\mathbf{r})$: 巨視的吸収断面積 [1/m]
- $\phi(\mathbf{r}, t)$: 中性子束 [m⁻²・s⁻¹]

(4.4) ~ (4.6) については、以上のように直感的に導出することができるが、流出率については、やや面倒である。

まず、**J**を**中性子流** (neutron current、Vの表面における正味の中性子の流れを表すベクトルで、ベクトルの大きさの単位は [m⁻²・s⁻¹]、中性子の流れの方向を向いてい

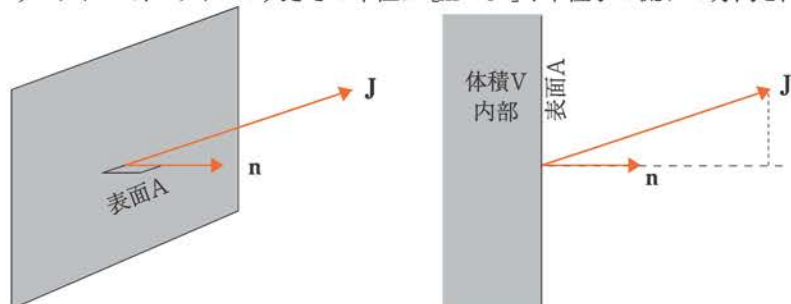


図4.3 表面から流出する中性子数の計算

る)、 \mathbf{n} を表面から外向きの法線ベクトルとする(図4.3)。

\mathbf{n} は、中性子密度を表す n とは異なっていることに注意する必要がある。なお、中性子流については、中性子束と混同しやすいため、物理的なイメージを後ほど詳しく説明する。

体積 V の表面における単位面積を単位時間あたりに通過する(流出する)正味の中性子の数は、 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ で与えられる($\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ は \mathbf{J} と \mathbf{n} の内積)。(注4.2)

これより、体積 V の表面 A から流出する中性子の数 [1/sec] は

$$\int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA \dots\dots\dots (4.7)$$

で与えられる。ここで、流出率が正であれば、中性子が正味で流出(すなわち、流出>流入)、負であれば、中性子が正味で流入(すなわち、流出<流入)していることとなる。

(4.4) ~ (4.7) 式を(4.3)式に代入すると、(4.8)式を得る。

$$\int_V \frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} d\mathbf{r} = \int_V S(\mathbf{r},t) d\mathbf{r} - \int_V \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) d\mathbf{r} - \int_A \mathbf{J}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{n} dA \dots\dots\dots (4.8)$$

拡散方程式を差分法などで数値的に解く場合には、(4.8)式を直接用いる場合が多い。しかし、(4.8)式の形では解析的に解を求めることができないため、ベクトル解析で用いられている(ガウスの)発散定理を用いて(4.8)式に含まれている表面積分を体積積分に変換する。発散定理は(4.9)式で与えられる(Appendix III、IV参照)。

$$\int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \text{div} \mathbf{J} d\mathbf{r} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d\mathbf{r} \dots\dots\dots (4.9)$$

(4.9)式を用いると、(4.8)式は以下ようになる。

$$\int_V \frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} d\mathbf{r} = \int_V S(\mathbf{r},t) d\mathbf{r} - \int_V \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) d\mathbf{r} - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r},t) d\mathbf{r} \dots\dots\dots (4.10)$$

(4.10)式は任意の体積 V について成り立つので、

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} = S(\mathbf{r},t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) - \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r},t) \dots\dots\dots (4.11)$$

を得ることができる。(4.11)式が連続の式の一般形である。また、中性子の数が定常、つまり時間に依存しない場合には、(4.11)式は以下ようになる(定常近似)(注4.3)。

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}) \dots\dots\dots (4.12)$$

なお、(4.11)式の導出にあたっては、近似を全く行っていないことに留意する必要がある。実際には、第2章で見たように、微視的断面積には中性子のエネルギーに対する依存性があるため、巨視的断面積も中性子のエネルギーに依存する。しかし、ここではまだ考慮に入れていない。すなわち、(4.11)式は(中性子のエネルギー依存性を除けば)厳密な式である。

また、(4.12)式についても、中性子密度(中性子束)が時間に依存しないという「定常近似」以外の近似は一切用いられていない。第4章の中心的な話題である「拡散近似」はこの後で導入される。

以降では、定常近似を仮定して話を進める。すなわち、(4.12)をベースに議論を進めていく。

4.2.2 中性子束と中性子流

拡散近似を導入する前に、(4.7)式で導入した中性子流と第2章で取り扱った中性子束の関係をもう一度整理しておこう。これら二つの概念はよく似ていることから混乱をまねくことがあるため、これら二つの違いについて再確認する。

中性子流 \mathbf{J} とは、単位面積を単位時間あたりに通過し、特定の方向に向かう正味の中性子の数で、ベクトル量である。単位は $[m^{-2} \cdot s^{-1}]$ となる。

一方、中性子束 ϕ とは、①単位面積を単位時間あたりに通過する中性子の総数、

注4.2:たとえば、中性子の流れ \mathbf{J} が表面 A に直交していれば、表面 A から単位時間に流れ出す中性子の数は、 \mathbf{J} の大きさに表面 A の面積を乗じたものとなる。一方、 \mathbf{J} が表面 A に平行であれば中性子が表面 A を横切ることはなく、表面 A から流出する中性子の数は零となる。すなわち、 \mathbf{J} が表面 A に対して平行に近くなるほど、表面 A から単位時間に流出する中性子数は少なくなる。これは、地面に当たる太陽の光は、太陽が真上にあるときに最も強く、夕方には弱くなる理屈と同じである。この効果は \mathbf{J} と \mathbf{n} の内積の形で考慮することが可能である。

注4.3: (4.12)式のように変形することで、拡散方程式の導出を進めている訳であるが、(4.8)式に比べて(4.11)式もしくは(4.12)の意味が直感的に分かりにくくなっているように思える。もともと連続の式は、「ある体積 V 」を考え、その中の中性子のバランスについて考察を行うことで導出している。これに対して、(4.12)式は、「非常に小さな体積」を想定しており、もともとの導出時の「イメージ」がうまく適用できないことが一つの要因となっていると思われる。また、(4.9)式の発散定理についても、そのイメージをわかりやすく伝えることは意外に難しく、(4.11)式もしくは(4.12)式の物理的なイメージをわかりにくくしている。

繰り返しになるが、中性子の移動に関する物理量は中性子流で表されるのであり、中性子束は中性子の移動を直接表す物理量ではない。むしろ、「中性子の密度」に近い物理量である。実際、中性子束の定義は「中性子密度」に「中性子速度」を乗じたものであり、中性子密度と比例関係にある。この意味から、中性子束は「反応の起こりやすさの観点から中性子密度を表す便宜的な量」という理解が最も直感的と言えるかもしれない。

4.2.3 Fickの法則

4.2.1節では、定常状態における連続の式(4.12)式を導出した。(4.12)式を解くことにより、炉心内の中性子の振る舞いが計算できることになる。そこで、実際に(4.12)式を解こうとすると、以下の問題にぶつかる。

「(4.12)式において、巨視的吸収断面積 Σ_a および中性子源 s は既知(入力値)であり、未知数は ϕ と J である。未知数が二つあるのに、式はひとつしかない。すなわち、(4.12)式は解けない。」

4.2.2節では、中性子束と中性子流の関係を見てきた。従って、4.2.2節と同じようにして中性子流と中性子束の関係を求めればよいと考える人もあるかもしれない。しかし、ちょっと待って欲しい。4.2.2節で中性子束と中性子流の関係を求めることができたのは、中性子の飛行方向と各飛行方向への中性子の数が詳細に分かっていたからである。そして、この「中性子の飛行方向と各飛行方向への中性子の数」こそが、我々が最終的に求めたいものである。つまり、「式がひとつしかない」という問題は解決していないのである。

この問題を解決するため、中性子束と中性子流の関係を与える新たな法則を導入する。これが**フィック(Fick)の法則(Fick's law)**と呼ばれるものである。

Fickの法則は中性子束と中性子流の関係を与える近似式であり、もともと、化学的な拡散の現象を説明するものである。ある溶液において、溶質は濃度の濃い部分から薄い部分に拡散していく。Fickの法則では、溶質の移動速度(流速)は濃度の変化量(勾配)に比例するという(直感的に正しそうな)近似を適用する。Fickの法則は、溶液中の拡散のみならず、ガスの拡散、熱の拡散などにも適用可能である。Fickの法則では、中性子の集団はあたかもガスの様に振る舞うと仮定され、拡散現象に基づいて濃度の高い(中性子密度の高い)部分から濃度の低い(中性子密度の低い)部分に向かって炉心内を移動(拡散)するという取り扱いになる。拡散理論(もしくは拡散近似)という名前は、拡散現象を対象とするFickの法則を利用しているという事実によっている。

さて、原子炉内の中性子が溶液中の溶質(もしくはガス)と同じように振る舞うという近似(拡散近似)は、一般的に良好な精度を示すことが経験的に分かっている。Fickの法則を1次元体系に適用すると、以下のように書くことができる。(図4.8)

$$J_x = -D \frac{d\phi}{dx} \dots\dots\dots (4.13)$$

ここで

D : **拡散係数** [m] (diffusion coefficient)

である。

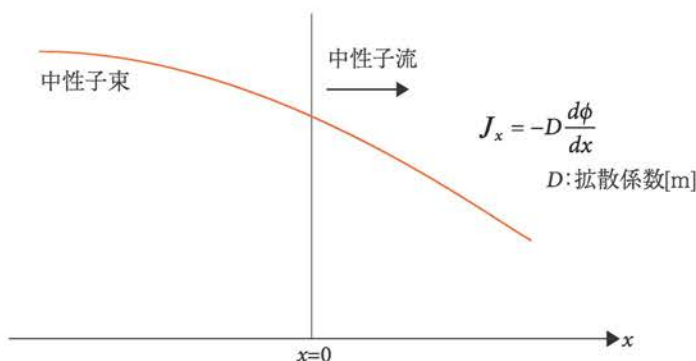


図4.8 中性子束と中性子流の関係(Fickの法則)

(4.13) 式の物理的な意味を少し考察する。図4.8において、左側 ($x < 0$) の領域の中性子束は、右側 ($x > 0$) の領域のそれに比べて大きい。従って、中性子の散乱回数は、右側の領域に比べ、左側の領域においてより多いはずである。中性子は散乱によって飛行方向がランダムに変化すると考えると、 $x=0$ を超えて左側から右側に移動する中性子の数は、右側から左側に移動する中性子の数に比べて多いはずである。従って、 $x=0$ の平面を通じて移動する正味の中性子の数は、正の向き (すなわち x が正の方向) となる。(4.13) 式は、上記の物理的な考察に対応するもので、中性子束の傾きの方向に中性子が流れていることを示している。(4.13) 式右辺のマイナス符号は、中性子束の傾きが負の場合、正味の中性子の流れが正の向きになると言う意味を持っている。^(注4.5)

さて、Fickの法則をより一般的に書くと、

$$\mathbf{J} = -D \text{grad}\phi = -D \nabla\phi \dots\dots\dots (4.14)$$

となる。なお、拡散係数は、ボルツマンの輸送方程式から拡散方程式を近似的に導出することにより、以下の形で表されることが分かっている。^{1) 2) (注4.6)}

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} = \frac{1}{3(\Sigma_t - \Sigma_{s1})} \dots\dots\dots (4.15)$$

ここで、

- Σ_{tr} : 巨視的輸送断面積 [1/m]
- Σ_t : 巨視的全断面積 [1/m]
- Σ_{s1} : 一次の巨視的非等方散乱断面積 [1/m]

これまでFickの法則について議論してきたが、Fickの法則で用いられている近似をもう一度まとめると以下ようになる。

- ・中性子流が中性子束の傾きに比例する
- ・比例係数 (拡散係数) が (4.15) 式で与えられる

どちらも直感的には妥当な仮定である。実際、これまでの炉心解析の経験によると、商業用軽水炉のような大型で中性子の漏れが少ない体系に対して、拡散近似は驚くほど高い精度で適用できることが分かっている。そのため、商業用軽水炉においては、主として拡散理論を用いた炉心解析手法によって炉心特性の評価を行っているが、炉心特性の設計値と測定値は良く一致することが確認されている。

原子炉内における中性子束と中性子流の関係の一例を図4.9に示す。図4.9は、PWRの集合体が4体隣接した体系における低エネルギー (熱) 領域の中性子束分布 (左) と中性子流 (右) である。中性子流を表す図においては、矢印の向きが流れの方向を、矢印の大きさが中性子流の大きさを表している。図4.9のAの部分には、Puを含むMOX燃料^(注4.7) が1体配置されており、残りの3体はUO₂燃料である。Puは低エネルギーの中性子をよく吸収するため、MOX燃料の部分で中性子束は低い値となっている。そのため、中性子は周辺のUO₂燃料から中性子束の低いMOX燃料に移動する (流れ込む) 形と

注4.5: 正味の中性子流の定義として、座標軸のプラスの方向に中性子が (正味) 移動している場合を正としているため、(4.13) 式の右辺にマイナス符号が付いている。このマイナス符号は時として混乱の元になるが、「中性子は密度の高いところから低いところに移動したがらる」という事実と、中性子流の向きはどちらを正としているか、に常に注意する必要がある。

注4.6: (4.15) 式自体は比較的簡単であるが、導出は比較的煩雑であるため、詳細は参考文献1) に譲る。おざっぱには、拡散係数は以下のように導出される。まず、ボルツマンの輸送方程式に現れる中性子束 (角度中性子束 ψ) の角度依存性を以下のようにルジャンドル多項式 $P_l(\cos\theta)$ で展開する (Appendix VII 参照)。

$$\psi(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l P_l(\cos\theta)$$

ルジャンドル多項式で展開した場合、第一項 (ルジャンドル多項式の0次で展開されるため、 P_0 成分と呼ばれる) の展開係数 ϕ_0 が中性子束、第二項 (P_1 成分と呼ばれる) の展開係数 ϕ_1 が中性子流に対応することが知られている。次にこの展開係数の第三項以上 (P_2 成分以上の高次の展開係数) を無視し、展開係数の第二項 (すなわち、中性子束 ϕ_0 および中性子流 ϕ_1) までに対する輸送方程式 (P_1 輸送方程式) を導く。この P_1 輸送方程式から中性子流 ϕ_1 と中性子束 ϕ_0 の関係を導くことにより、(4.15) 式を導出することができる。

注4.7: PuO₂ および UO₂ からなる燃料のことであり、混合酸化物 (Mixed Oxide, MOX) 燃料と呼ばれる。日本では、MOX燃料をPWRやBWRなどの軽水炉で使用することをプルスーマルと呼んでいる。これは、プルトニウムをサーマルリアクター (熱中性子炉) で使用することから来ている。

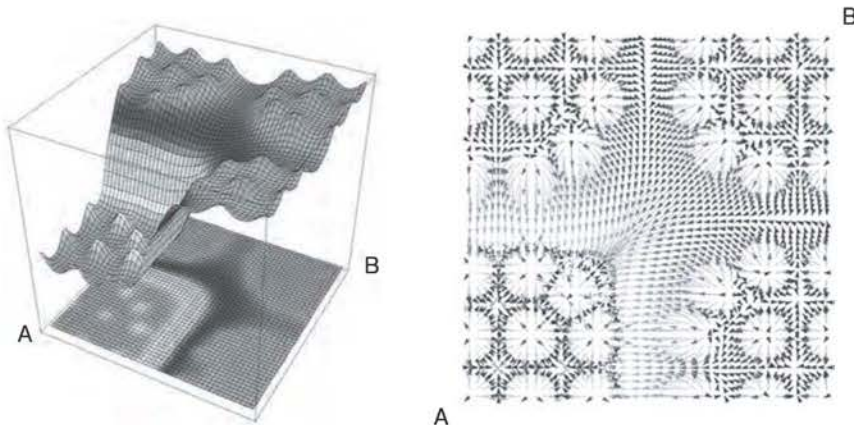


図4.9 PWRにおける集合体隣接体系における中性子束と中性子流の関係

なっている。これが、 UO_2 燃料からMOX燃料への中性子流として現れている（中性子流の矢印が UO_2 燃料からMOX燃料の方向に向いている）。ちなみに、図4.9の中性子流（右）は、中性子束からFickの法則を用いて計算したものである。

ただし、拡散近似が精度良く成り立たない場合もある。たとえば、真空領域では断面積が零なので、(4.15)式に基づいて拡散係数を計算することができない。このような場合には、輸送理論に基づく結果を用いて、特別な方法で拡散係数を評価する必要がある。また、4.2.2節で述べた例題1もFickの法則が成り立たない一例である。例題1では、薄膜の左と右における中性子束は同じ値であり、(4.14)式を用いると、正味の中性子流は零となるはずである。しかし、例題1では、中性子流の値は中性子束の値と等しくなっている。これは、例題1においては中性子の散乱が全く存在せず、中性子の角度方向が極めて偏っている（左→右の一方のみ）ことに起因している。Fickの法則は、ガスの拡散のように、散乱が多く、粒子の飛行方向の偏りが小さい場合には高い精度を与えるが、例1のように中性子の飛行方向に大きな偏りが見られる場合には、精度が悪化することに注意する必要がある。

これまで議論してきたように、Fickの法則はあくまでも近似であり、以下に示す場合には、精度良く成り立たないことに注意する必要がある。

- ・中性子の強吸収体の近く
- ・中性子源の近く
- ・原子炉の表面付近
- ・中性子の散乱が著しく非等方である場合
- ・中性子の飛行方向が著しく非等方である場合

これらのケースについては、拡散理論でなく、中性子の飛行方向をより正確に考慮する輸送理論を使用する必要がある。

4.2.4 拡散方程式

本節では、(4.12)式で与えられる連続の式と、Fickの法則の(4.14)式を利用して**拡散方程式** (diffusion equation) を導出する。連続の式である(4.12)式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \Sigma_a \phi = S$$

にFickの法則の(4.14)式

$$\mathbf{J} = -D \text{grad} \phi = -D \nabla \phi$$

を適用すると、以下の拡散方程式を得ることができる。

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi + \Sigma_a \phi = S \dots\dots\dots (4.16)$$

なお、拡散係数 D が位置に依存しない場合、(4.16)式は(4.17)式のように簡略化される。原子炉の解析においては、(4.17)式を用いることが多いが、あくまでも拡散係数が空間的に一定であるという仮定が入っていることに注意する必要がある。

$$-D \nabla^2 \phi + \Sigma_a \phi = S \dots\dots\dots (4.17)$$

(4.16)式、(4.17)式において、拡散係数 D 、巨視的吸収断面積 Σ_a 、中性子源 S は一般に既知（入力値）であり、未知変数は中性子束 ϕ である。つまり、拡散方程式は、二階の偏微分方程式になることが分かる。

より具体的なイメージを掴むため、いくつかのケースについて、(4.17)式を書き下すこととする。1次元体系（平板状）の場合、(4.17)式は以下ようになる。

$$-D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \Sigma_a \phi = S \dots\dots\dots (4.18)$$

これより、一次元平板体系の場合には、拡散方程式は二階の常微分方程式となることが分かる。また、二次元X-Y体系の場合は

$$-\left(D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \Sigma_a \phi = S \dots\dots\dots (4.19)$$

注4.8: 原子炉の解析で現れる座標系において、ラプラス演算子は以下のように表される。(Appendix III)

直交座標系: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
 円柱座標系: $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
 球座標系: $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$

なお、実機炉心の解析において用いるのは、ほとんどが直交座標系である。

となる。(注4.8)

なお、(4.17)式は、核分裂による中性子源を直接取り扱う形式とはなっていないことに注意する必要がある。すなわち、(4.17)式で直接取り扱えるのは、「核分裂を起こさない体系に中性子源が存在する」状態であり、たとえば核分裂を起こさない非増倍体系に中性子を打ち込む、Am-Beなどの中性子源をおく、等の状況に対応する。

核分裂を含む拡散方程式の取り扱いについては、別途留意すべき事項があるため、第5章で述べる。

4.3 拡散方程式の解

4.3.1 拡散方程式を解くには

4.2節において、(4.16)式もしくは(4.17)式(D が空間的に一定な場合)で与えられる拡散方程式を導出した。体系内の中性子束の分布を求めるためには、拡散方程式を解く必要がある。後述するが、実際の原子炉のように複雑な体系において拡散方程式の解を求めるためには、数値計算に頼らざるを得ない。しかしながら、中性子源が存在する体系内において、中性子束がどのような分布をするか、実感を持って理解するためには、いくつかの簡単な体系について(4.17)式を解いてみるのが肝要である。そのため、本節では、いくつかの単純な体系において拡散方程式を解くことを試みる。

前述のように拡散方程式は二階の偏微分方程式であるため、これを解くためには**境界条件**(boundary condition)が必要となる。そこで、まず中性子拡散方程式に用いられる代表的な境界条件について解説し、引き続いて拡散方程式の解析解を導出することを試みる。

4.3.2 境界条件

4.2.4節で見たように、拡散方程式は二階の微分方程式である。従って、解を求めるためには、境界条件が二つ必要となる。本節では、拡散方程式を解く際に用いられる一般的な境界条件を紹介する。境界条件は、体系の最外周部で用いられる外部境界条件と体系の内部で異なった媒質(領域)が接している場合に用いられる内部境界条件がある。外部境界条件は解析条件に応じていくつかの種類がある。

(1) 外部境界条件

(a) 中性子束零境界条件

体系の外周部で中性子束が0となる条件であり、(4.20)式で表される。

$$\phi=0 \quad \dots\dots\dots (4.20)$$

ただし、実際の体系において、都合良く体系表面の中性子束が零になることは希であろう。その意味では、本境界条件は仮想的(人為的)なものであると言えるだろう。このように書くと、本境界条件は役に立たないとの印象を与えるかもしれないが、実際は、後述する外挿境界条件と併せて用いることで、簡易な解析において有益なものとなる。また、本境界条件は拡散方程式を解析的に解く際に取り扱いやすいという特徴があるため、(拡散方程式を解析的に解くための)練習問題などで良く用いられる。

(b) 完全反射境界条件

体系の外周部で中性子束の傾きが零となる境界条件であり、(4.21)式で与えられる。

$$\nabla\phi=0 \quad \dots\dots\dots (4.21)$$

(4.14)式を考慮すると、完全反射境界条件は境界における中性子流が零となる条件であるとも言える。「反射境界」条件と呼ばれるのは、中性子がこの境界に達したときに、あたかも「鏡で反射したかのごとく境界から戻ってくる」状況を想定しているためである。このような想定は、完全反射境界をはさんで、計算体系が完全に対称である場合に成り立つ。従って、この条件は、体系の対称性を利用することにより、計算の対象とする領域を限定するために有効である(図4.10)。

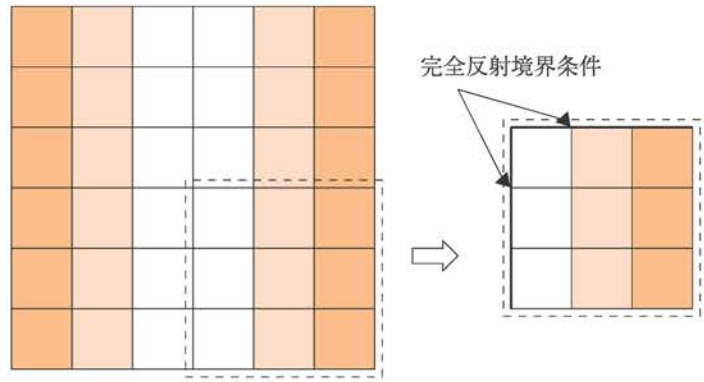


図4.10 完全反射境界条件

完全反射境界条件は、原子炉内の燃料棒（燃料セル）や燃料集合体の解析、さらに炉心計算など、様々な場面で用いられる重要な境界条件である。また、拡散方程式を解析的に解く際にも考慮しやすい特徴を持つ。

(c) 真空境界条件

体系から漏洩した中性子が戻ってこないという境界条件であり、(4.22) 式で与えられる。原子炉の表面などの境界条件として使用されることがある。

\mathbf{n} を体系表面の法線ベクトルとすると、この境界条件は

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = -\frac{\phi}{d^{ex}} \quad \dots \dots \dots (4.22)$$

と表される。ここで、 d^{ex} は外挿距離 (extrapolation length) とよばれる量である (図 4.11)。図 4.11 からわかるように、体系表面における中性子束の傾きを「直線的に外挿」し、体系の表面を起点として中性子束の値が零となるまでの距離が外挿距離となる。一次元体系の場合、(4.22) 式は

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{\phi}{d^{ex}} \quad \dots \dots \dots (4.23)$$

となる。

真空境界条件の場合、外挿距離 d^{ex} は (4.24) 式で近似的に与えられる²⁾。

$$d^{ex} \cong 0.71 \frac{1}{\Sigma_{tr}} \quad \dots \dots \dots (4.24)$$

前述したように、真空領域においては、巨視的断面積が零となり、拡散係数が定義できないため、拡散理論が成り立たない。そのため、 d^{ex} は、(4.22) 式を境界条件として用いた拡散計算の結果が、厳密な輸送理論の結果を近似的に再現するように調整される場合も多い。

実は、真空境界条件は、外挿境界条件と呼ばれるもののうち、特殊なケースであり、(4.22) 式は一般には外挿境界条件と呼ばれる。そして、外挿距離 d^{ex} が (4.24) 式で

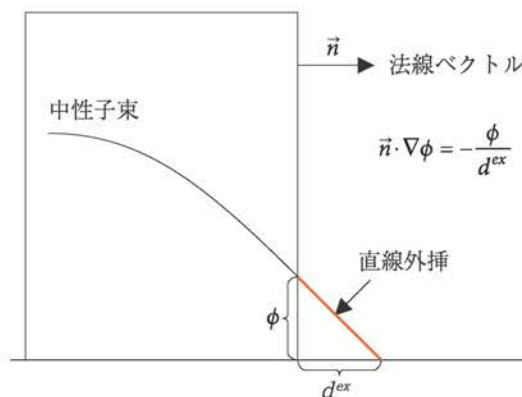


図4.11 外挿距離の概念

与えられる特殊な値をとる場合、真空境界条件として機能する。

外挿境界条件は、 d^{ex} の値を適切に設定することにより、真空以外の媒質、たとえば中性子の強吸収体である制御棒などに対しても使用されることがある。

(2) 内部境界条件

これは、異なった物質が接している場合の境界条件であり、実際の炉心解析には必ず現れる重要な境界条件である(図4.12)。内部境界条件は、(4.25)式および(4.26)式のセットで定義される。添え字のA、Bは領域を表している。

$$-D_A \nabla \phi_A \cdot \mathbf{n} = -D_B \nabla \phi_B \cdot \mathbf{n} \dots\dots\dots (4.25)$$

$$\phi_A = \phi_B \dots\dots\dots (4.26)$$

(4.25)式は、物質境界において正味の中性子流が連続であることを示している。すなわち、領域Aの境界において領域Aから領域Bへ移動する正味の中性子数は、領域Bの境界において領域Aから移動してくる正味の中性子数に等しくなることを示している。つまり境界において、中性子が吸収されたり発生したりしていないという当たり前のことを示している。一方、(4.26)式は物質境界で中性子束が連続であるという境界条件を示している(注4.9)。

(4.25)式は一見、抽象的に見えるが、たとえば一次元体系では以下ようになる。

$$-D_A \left. \frac{d\phi_A}{dx} \right|_{x=a} = -D_B \left. \frac{d\phi_B}{dx} \right|_{x=a} \dots\dots\dots (4.27)$$

ここで、 $x=a$ は、物質が接している位置を示している。図4.12においては、領域Aと領域Bの境界で中性子束の傾きが異なっている。これは、領域A、Bにおける拡散係数 D_A 、 D_B が異なっていることから、(4.27)式を満足するために、領域境界における中性子束の微分値(すなわち傾き)が不連続になることに起因している。一方、中性子束の値自体は、領域境界においても連続である。

4.3.3 拡散方程式の解析解

前節までに拡散方程式の導出および境界条件について議論を行った。本節では、いくつかの代表的な体系について拡散方程式を解析的に解き、中性子の振る舞いを理解する一助にしたいと考える。なお、前述のように、本節で取り扱うのは、体系内に存在する中性子源が既知の場合のみである。核分裂が存在する場合の拡散方程式については、第5章で取り扱う。

(1) 無限均質体系(均一中性子源)

最も簡単なケースとして、無限で均一な媒質中に均一な中性子源がある場合を考える。媒質の巨視的吸収断面積を Σ_a [1/m]、中性子源強度を S [$\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$]とする。この場合、明らかに中性子束は場所に依存しないため、(4.17)式において $-D\nabla^2\phi=0$ となる。従って、拡散方程式は

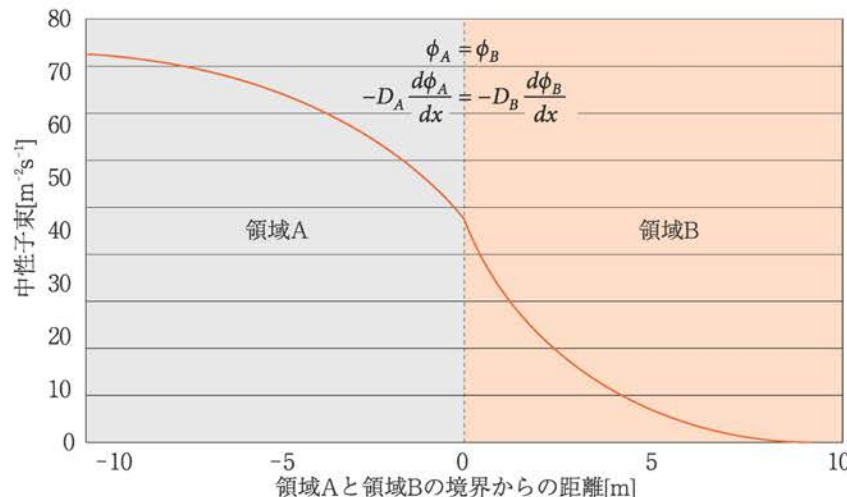


図4.12 異なる物質(媒質)が隣接している体系での中性子の振る舞い

注4.9: (4.25)式、(4.26)式は、物理的に極めて妥当と考えられる境界条件である。そのため、原子炉の炉心解析においては、これらの境界条件が(当たり前の前提条件として)長い間使われてきた。しかし、1980年代初めに、(4.26)式をそのまま適用することが適切ではない場合がある、という従来の「常識」を覆す研究結果が報告された。原子炉全体を取り扱う炉心核特性解析においては、燃料集合体の内部に存在するペレット、被覆管、冷却材といった構造をそのまま取り扱うことは通常行わない。このような詳細な解析は、現在の計算機を用いても非常に困難だからである。そのため、燃料集合体内部を平均化する「均質化」という処理を行う。この均質化処理を行った場合、(4.26)式をそのまま使用すると計算誤差が発生することが指摘されたのである。現在の炉心解析においては、(4.26)式をそのまま使用せず、以下のように「境界で中性子束が不連続である」ことを計算条件としている。

$$f_A \phi_A = f_B \phi_B$$

ここで、 f_A 、 f_B は「不連続因子」と呼ばれるもので、集合体内部の構造を平均化しても計算誤差が最小限ですむように決められるパラメータである。このように、既に確立し、誤りが無いと思われる「理論」を疑うことは、学問の進歩に極めて大きな寄与をするケースがある。なお、原子炉の内部の構造を平均化しない場合、(4.26)式を用いることは妥当である。

$$\Sigma_a \phi = S \quad \dots\dots\dots (4.28)$$

となる。これより、中性子束は以下のように求まる。

$$\phi = \frac{S}{\Sigma_a} \quad [\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}] \quad \dots\dots\dots (4.29)$$

この場合、中性子源は中性子源強度 S と巨視的吸収断面積 Σ_a のみに依存する形となる。中性子束は中性子源強度に関しては線形であり、中性子源強度が2倍になれば中性子束も2倍、3倍になれば3倍という結果になる。これは、直感的にも妥当であろう。一方、吸収断面積については、反比例の形となる。ちなみに、吸収断面積が零の場合には、中性子束の値は不定になる。これは物理的には当たり前のことである。すなわち、中性子の吸収がないところに中性子が発生し続けると、中性子の個数は定常状態に達することはなく、増え続ける。すなわち、(4.17)式を導いた前提条件の一つである「時間に関して定常」という前提が崩れることとなる。そのため、このような状態に対しては「定常状態」を前提とした(4.17)式では正しい答えが得られず、時間依存の拡散方程式を解く必要がある。

(2) 有限平板体系

厚さ $2a$ [m]の平板内に強度 S [$\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$]の中性子源が一様に分布している体系を想定する(図4.13)。体系の巨視的吸収断面積を Σ_a [1/m]とし、体系の境界における中性子束は零とする。

取り扱う体系が一次元平板であるため、拡散方程式および境界条件は以下の形となる。なお、体系の中心の座標を $x=0$ とする。

$$-D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = S \quad \dots\dots\dots (4.30)$$

$$\phi(-a) = 0 \quad \dots\dots\dots (4.31)$$

$$\phi(a) = 0 \quad \dots\dots\dots (4.32)$$

解きやすくするため、(4.30)式の両辺を $-D$ で割り、以下のように変形する。

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \phi(x) = -\frac{S}{D} \quad \dots\dots\dots (4.33)$$

ここで、 L は**拡散距離**(diffusion length)と呼ばれる量で、(4.34)式で定義される。単位は[m]である。巨視的吸収断面積が小さいほど、また、拡散係数が大きいほど拡散距離は長くなる。^(注4.10)

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} \quad \dots\dots\dots (4.34)$$

注4.10: 無限媒質中に点状の中性子源が存在する場合を考える。中性子源から放出された中性子が吸収される点までの平均の直線距離 \bar{r} は、拡散理論によると、 $\bar{r} = \sqrt{6}L$ であることが示される。つまり、中性子が放出されてから吸収されるまでの平均の直線距離は、拡散距離の約2.5倍である。(4.14)式より、拡散係数が大きいほど正味の中性子流が大きくなる、すなわち、中性子が移動しやすくなる。また、巨視的吸収断面積が小さいほど、中性子が吸収されにくくなるため、より遠くまで移動することとなる。拡散距離は、このような物理的な現象を反映したものとなっている。

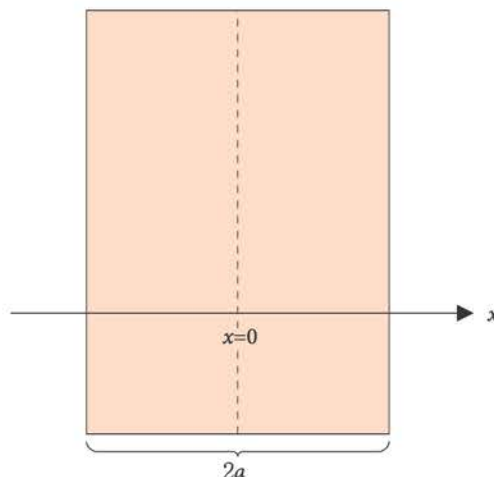


図4.13 有限平板体系

〈解答4.5〉

体系の左端を原点にとると、体系内の拡散方程式および境界条件は以下のようになる。

$$-D \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = S \quad \dots\dots\dots (4.44)$$

$$-D \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.45)$$

$$\phi(a) = 0 \quad \dots\dots\dots (4.46)$$

(4.30) 式～(4.32) 式と同様に (4.44) 式～(4.46) 式を解くと、

$$\phi(x) = \frac{L^2 S}{D} \left(1 - \frac{\cosh(x/L)}{\cosh(a/L)} \right) \quad \dots\dots\dots (4.47)$$

となる。すなわち、(4.42) 式と同一の中性子束分布となる。これは、図4.13で与えられた体系が^s(境界条件も含めて)原点に関して対称であることによる。すなわち、本例題は、(4.30) 式～(4.32) 式を(等価な)別の境界条件に置き換えて解いたことになる。

(3) 半無限平板体系

厚さが無限の平板に中性子が垂直に入射している場合を考える(図4.14)。体系境界における入射中性子流の大きさを J とし、体系内に中性子源は存在しないものとする。また、体系の拡散係数を D [m]、巨視的吸収断面積を Σ_a [1/m]、拡散距離を $L = \sqrt{D/\Sigma_a}$ [m] とする。

この場合、解くべき拡散方程式および境界条件は(4.48) 式、(4.49) 式および(4.50) 式となる。なお、中性子の入射位置を $x=0$ とする。

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \phi(x) = 0 \quad \dots\dots\dots (4.48)$$

$$-D \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} = J \quad \dots\dots\dots (4.49)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0 \quad \dots\dots\dots (4.50)$$

(4.49) 式は、入射位置 ($x=0$) における中性子流の大きさが J であること、(4.50) 式は体系内に中性子源が存在しないことから体系の無限遠方では中性子束が零になること、を示している。



図4.14 半無限平板に入射する中性子流

(4.48) 式の解は、以下の形で与えられる。

$$\phi(x) = c_1 e^{x/L} + c_2 e^{-x/L} \quad (4.51)$$

(4.51) 式の右辺第一項は、体系の無限遠方で中性子束が零になると言う条件、すなわち (4.50) 式を満たさないため、結局、

$$\phi(x) = c_2 e^{-x/L} \quad (4.52)$$

となる。 $x=0$ における境界条件を考慮するために (4.52) 式を (4.49) 式に代入すると、 c_2 を決定することができ、最終的に平板内の中性子束分布は以下のようになる。

$$\phi(x) = \frac{LJ}{D} e^{-x/L} \quad (4.53)$$

(4.53) 式は、体系内に入射した中性子は指数関数的に減衰することを示している。この際、緩和距離 (中性子束が $1/e$ に減衰するまでの距離) は、拡散距離の L に等しくなることが分かる。

(4) 無限均質体系 (点中性子源)

無限で均一な媒質中に点状の中性子源がある場合を考える。媒質の巨視的吸収断面積を Σ_a [1/m]、中性子源強度を S [1/s] とする。このような点状の中性子源は、たとえば加速器を用いて高エネルギー陽子を (細いビームダクトを通じて) 体系の中に入射し、タングステンや鉛などのターゲットにあて、核破砕反応により中性子を発生させるケースに見られるものである。

中性子は点状の中性子源を中心としてその周りに対称に広がっていくため、中性子源を原点とした球座標系で取り扱えると都合がよい。一次元の球座標系における拡散方程式は注4.8より、

$$-D \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} + \Sigma_a \phi(r) = 0 \quad (4.54)$$

となる。また、境界条件としては、以下のものを使用することができる。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0 \quad (4.55)$$

境界条件がもう一つ必要となるが、これについては後述する。

(4.54) 式は、以下のように変形することができる。

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} - \frac{1}{L^2} \phi(r) = 0 \quad (4.56)$$

(4.56) 式を解くために、以下の変数変換を行う。

$$w = r\phi(r) \quad (4.57)$$

(4.57) 式を用いると (4.56) 式は以下のように変形できる。

$$\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{L^2} w = 0 \quad (4.58)$$

(4.58) 式の一般解は、

$$w = c_1 e^{r/L} + c_2 e^{-r/L} \quad (4.59)$$

となる。すなわち、(4.57) 式より、

$$\phi(r) = c_1 \frac{e^{r/L}}{r} + c_2 \frac{e^{-r/L}}{r} \quad (4.60)$$

である。境界条件の (4.55) 式を考慮すると、結局、

$$\phi(r) = c_2 \frac{e^{-r/L}}{r} \quad (4.61)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{(D_B/L_B)}{(D_A/L_A)\tanh(a/L_A)\tanh(b/L_B) + (D_B/L_B)} \dots\dots\dots (4.78)$$

$$\beta = \frac{L_A S \sinh\left(\frac{a}{L_A}\right)}{\frac{D_A}{L_A} \sinh\left(\frac{a}{L_A}\right) \sinh\left(\frac{b}{L_B}\right) + \frac{D_B}{L_B} \cosh\left(\frac{a}{L_A}\right) \cosh\left(\frac{b}{L_B}\right)} \dots\dots\dots (4.79)$$

となる。

(6) 反射体効果に関する検討

さて、実は、(5) で取り扱った問題は、(2) で取り扱った平板領域をAとし、領域Aの外側に新たな領域Bを付加したものである。領域Bを付加することで、領域A内の中性子束はどのように変化したであろうか?この点について検討を行うため、(2) および (5) の領域A内の平均中性子束を比較する。

(2) の体系内における中性子束の平均値は (4.42) 式を用いて以下のように与えられる。

$$\bar{\phi} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \phi(x) dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{L^2 S}{D} \left(1 - \frac{\cosh(x/L)}{\cosh(a/L)}\right) dx = \frac{L^2 S}{D} \left(1 - \frac{L}{a} \frac{\sinh(a/L)}{\cosh(a/L)}\right) \quad (4.80)$$

一方、(5) の領域A内の平均中性子束は (4.76) 式および (4.78) 式より以下のように与えられる。

$$\bar{\phi}_A = \frac{1}{a} \int_0^a \phi_A(x) dx = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{L_A^2 S}{D_A} \left\{1 - \alpha \frac{\cosh(x/L_A)}{\cosh(a/L_A)}\right\} dx = \frac{L_A^2 S}{D_A} \left(1 - \alpha \frac{L_A}{a} \frac{\sinh(a/L_A)}{\cosh(a/L_A)}\right) \dots\dots\dots (4.81)$$

$b=0$ すなわち反射体(領域B)が存在しないとき、(4.78) 式より $\alpha=1$ であり、(4.80) 式および (4.81) 式は一致する。一方、領域Bの厚さ b が大きくなるにつれ、 α は1より小さくなり、(4.81) 式の方が中性子束の平均値が高くなるのがわかる。

これは、領域Bが、領域Aから漏れだしてくる中性子束を部分的に「反射し」、領域Aに戻しているためである。すなわち、領域Bをつけることで、領域Aからの中性子の漏れが少なくなることによっている。このような働きをする領域を**反射体** (reflector) 領域と呼んでいる。

原子炉の設計においては、原子炉内で発生する中性子を有効利用することが一つのキーポイントとなる。そのためには、体系内で発生した中性子をできるだけ外部に漏れいさせない方策が重要となる。これを実現するための重要な方法が反射体であり、炉心の外に漏れだしてきた中性子を効率よく「反射」し、原子炉に戻す働きをこなす。

では、反射体はどのような性質を持っていることが好ましいのであろうか?領域Bがある程度の厚さを持つ場合($\tanh(b/L_B) \approx 1$)、 α をできるだけ小さくするためには、 D_B/L_B を D_A/L_A に比べて小さくすればよい。 $D_A/L_A = \sqrt{D_A \Sigma_{a,A}}$ 、 $D_B/L_B = \sqrt{D_B \Sigma_{a,B}}$ であることを考えると、領域Bの拡散係数と吸収断面積がそれぞれ領域Aのものに比べて小さければよいことが分かる。

領域Bの拡散係数が小さいと言うことは、中性子が領域Bに入り込みにくい、ということであり、吸収断面積が小さいと言うことは、領域Bに入り込んだ中性子があまり吸収されないことを示している。すなわち、反射体は中性子をできるだけその内部に入れず、さらに中に入った中性子を吸収せずに(散乱によって)できるだけ元の領域に戻すように働けば効率が高くなることを示している。

このことから、商業用軽水炉ではステンレススチールや軽水、研究用の小型原子炉では黒鉛や重水、さらに宇宙用の原子炉ではベリリウムなどが反射体として用いられている。反射体については、第5章においてより詳細に議論する。

(7) 多領域体系

(5) では、二領域体系において、拡散方程式の解析解の導出を試みた。その結果、二領域という単純な体系においてさえ、解析解は複雑なものになることが分かった。一方、実際の原子炉は多次元・多領域（さらに後述するようにエネルギー多群）であり、二領域体系に比べてはるかに複雑である。すなわち、実際の原子炉解析において、炉心内の中性子束の解析解を直接求めることは事実上不可能である。これが、実際の炉心解析において数値解析が用いられる理由である。なお、このように書くと、拡散方程式の解析解を導出することは無意味であるように思われるかもしれない。しかし、解析解により、単純な原子炉内における中性子束分布を概略評価可能であること、現在、原子炉の炉心解析で幅広く用いられている解析手法（近代ノード法）においては、メッシュ内の中性子束分布を拡散方程式の解析解により表現している場合が多いこと、などの理由から、拡散方程式の解析解の重要性は依然として失われていない。

4.4 多群拡散方程式

4.3節までは、中性子拡散方程式の導出およびその解について検討してきた。この過程で、中性子拡散方程式は、中性子の移動を厳密に記述するボルツマンの輸送方程式に対して中性子の飛行方向を近似することで得られることを述べた。

実は、ここまでの検討において、単純化のために考慮してこなかったもう一つの因子がある。それは、中性子のエネルギー依存性である。第2章で述べたように、中性子と物質の相互作用は、中性子のエネルギーに対して非常に複雑な振る舞いを見せる。そのため、原子炉内の中性子の挙動を計算する際には、中性子のエネルギーを考慮に入れる必要がある。本節では、中性子のエネルギー依存性を拡散理論で考慮する方法について検討する。

中性子のエネルギー依存性を考慮するためのもっとも直接的な方法は、中性子束のエネルギー依存性を拡散方程式において直接考慮することである。この場合、拡散方程式は以下のように書くことができる。

$$-\nabla \cdot D(\mathbf{r}, E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E) = \int_0^\infty \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' + S(\mathbf{r}, E) \quad (4.82)$$

ここで、

- $D(\mathbf{r}, E)$: 位置 \mathbf{r} 、エネルギー E における拡散係数 [m]
- $\phi(\mathbf{r}, E)$: 位置 \mathbf{r} 、エネルギー E における中性子束 [$\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$]
- $\Sigma_t(\mathbf{r}, E)$: 位置 \mathbf{r} 、エネルギー E における全断面積 [1/m]
- $\Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E)$: 位置 \mathbf{r} 、エネルギー E' から E への散乱断面積 [1/m/eV]
- $s(\mathbf{r}, E)$: 位置 \mathbf{r} 、エネルギー E における中性子源 [$\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$]

である。(4.82) 式は、これまで対象としてきた (4.16) 式と異なっているように見えるかもしれない。しかし、(4.16) 式の両辺に中性子の散乱項 ($\Sigma_s \phi$) を加え、第2章で示したように巨視的吸収断面積と巨視的散乱断面積の和が巨視的全断面積である ($\Sigma_a + \Sigma_s = \Sigma_t$) ことを思い出そう。

$$-\nabla D \nabla \phi + \Sigma_t \phi = \Sigma_s \phi + S \dots \dots \dots (4.83)$$

(4.16) 式は (4.82) 式の形に書くことができることが分かる。すなわち、(4.82) 式と (4.16) 式が同じ形であることを確認できる。

さて、4.3節では、エネルギー依存性がない拡散方程式に対して、中性子束の空間的な分布に関する解を求めた。では、同様に、(4.82) 式の解析解を求めることができるだろうか？ここで、もっとも単純なケースとして、中性子束の空間依存性がない場合を考える。この場合、(4.82) 式は以下のように書くことができる。

$$\Sigma_t(E) \phi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(E') dE' + S(E) \dots \dots \dots (4.84)$$

詳細については、第6章で述べるが、(4.84) 式が解析的に解けるためには、散乱

注4.14: 第6章では、(4.84)式に対していくつかの仮定を適用することで、中性子束のエネルギー依存性について議論する。

断面積のエネルギー依存性が極めて単純な形で与えられなければならない。しかしながら第2章で述べたように、散乱断面積を含め、断面積は中性子のエネルギーに対して複雑な挙動を示す。従って、残念ながら一般的なケースについて、(4.84)式を解析的に解くことは困難である^(注4.14)。

そこで、原子炉の解析においては、中性子のエネルギーをいくつかのグループに分ける**多群近似** (multigroup approximation) を用いることが一般的である。すなわち、(4.82)式を代表的なエネルギーグループ (エネルギー群) に分けて取り扱うことでエネルギー依存性を考慮する。

ただし、単純にグループ分けを行うことで断面積のエネルギー依存性を扱おうとすると、精度良い計算のためには、原子炉内における中性子のエネルギー範囲 (約20MeV~10⁻⁵eV) を数万のエネルギー群に分割する必要がある。このような計算は計算時間の観点から困難である。実際、軽水炉の炉心解析では、エネルギー群として2~3群程度が使用されている。

多群近似では、このような大胆な近似 (中性子のエネルギー範囲を2~3群に分割) を可能にするために、以下のように断面積の平均操作が行われる。

(4.82) 式の両辺をエネルギー群 ($E_g \leq E \leq E_{g-1}$) の間で積分する。

$$\begin{aligned} & -\int_{E_g}^{E_{g-1}} \nabla \cdot D(\mathbf{r}, E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E) dE + \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E) dE \dots\dots\dots (4.85) \\ & = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_0^\infty \Sigma_{s, E' \rightarrow E}(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E') dE' dE + \int_{E_g}^{E_{g-1}} S(\mathbf{r}, E) dE \end{aligned}$$

(4.85) 式は、g群の中性子束を

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\mathbf{r}, E) dE \dots\dots\dots (4.86)$$

とすると、以下のように書くことができる。

$$-\nabla \cdot D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{t, g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = \sum_g \Sigma_{s, g \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) + S_g(\mathbf{r}) \dots\dots\dots (4.87)$$

ここで、

$$\Sigma_{t, g}(\mathbf{r}) = \left(\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E) dE \right) / \phi_g(\mathbf{r}) \dots\dots\dots (4.88)$$

$$\Sigma_{s, g \rightarrow g}(\mathbf{r}) = \left(\int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_{s, 0}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' dE \right) / \phi_g(\mathbf{r}) \dots\dots\dots (4.89)$$

$$S_g(\mathbf{r}) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} S(\mathbf{r}, E) dE \dots\dots\dots (4.90)$$

$$D_g(\mathbf{r}) = \left(\int_{E_g}^{E_{g-1}} D(\mathbf{r}, E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E) dE \right) / (\nabla \phi_g(\mathbf{r})) \dots\dots\dots (4.91)$$

である。たとえば (4.86) 式と (4.88) 式より、

$$\begin{aligned} \Sigma_{t, g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) &= \left(\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E) dE \right) / \phi_g(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E) \\ &\dots\dots\dots (4.92) \end{aligned}$$

となる。他の項についても同様に考えられることから、(4.88)~(4.91)式で与えられる多群断面積を用いることにより、(4.87)式と(4.85)式は等価なものになることが分かる。

(4.87)式は多群拡散方程式と呼ばれ、さらに核分裂を考慮したものが原子炉の炉心解析に用いられる。炉心解析では、(4.88)~(4.91)式に現れる多群断面積を入力値と考え、(4.87)式を解くこととなる^(注4.15, 16)。

注4.15: 商業用軽水炉の炉心解析では、通常1群~数群程度のエネルギー群数が用いられる。高速炉の炉心解析では、十数群程度のエネルギー群数が一般的である。

注4.16: 多群断面積の定義である (4.88) 式~(4.91)式をよく見ると、実は「自己矛盾」をはらんでいることがわかる。すなわち、多群断面積を求めるためには、中性子束のエネルギー分布が必要となるのである。多群拡散方程式を解いて求められるのは、中性子束の空間分布とエネルギー分布のはずであった。すなわち、エネルギー分布が求まらないと多群断面積が求まらない。しかし、多群断面積が求まらないとエネルギー分布が求まらない。「鶏が先か、卵が先か」のような話である。この「自己撞着」が原子炉物理を複雑なものにしている。実際、原子炉物理の研究の多くは、上記の「自己撞着」をいかにスマートに取り扱うかをテーマとしている。この点について本教科書では深くふれないが、基本的には、「中性子束のエネルギー分布を詳細に求める際には、無限媒質や燃料セルなどの簡単な形状を仮定し、空間分布を詳細に求める際にはエネルギー分布を簡略化して(多群近似で)取り扱う」という戦略をとっている。この戦略は、既存の原子炉に対しては驚くほど成功を取ってきたが、未だに完全な解決法は見つかっていないと言ってもよいだろう。革新型の原子炉など、従来にないタイプの原子炉については、上記の点について十分な検討が必要であり、今後の研究課題の一つであるとも言える。

4.5 数値解法

原子炉の炉心解析においては、多群拡散方程式を解く必要があるため、4.3節で述べた解析解を直接用いることは困難であり、数値解法に頼らざるを得ない。実際、実機原子炉の設計においては、数値解法を繰り返し用いることで炉心の核設計を行っている。

多群拡散方程式を数値的に解くためには、計算体系を小さな領域(メッシュ)に分割し、空間に関する微分項を差分に置き換える方法が一般的である。商業用軽水炉の様に大型の体系内の中性子束分布を効率よく求めるためには、様々な数値計算モデル、アルゴリズムを用いる必要がある。これらの詳細については、本教科書の範囲を遙かに超えるため、詳細については述べないが、原子炉物理学の中心的な研究分野の一つになっている。^(注4.17)

4.6 まとめ

4章では連続の式からFickの法則の助けを借りて中性子の拡散方程式を導出した。また、体系境界における境界条件について議論し、平板などいくつかの体系について実際に解析解を求めた。これにより、中性子源が与えられた場合、単純な体系における中性子拡散方程式の解析解を求めることが可能になった。さらに、中性子のエネルギー依存性を考慮するための多群近似について議論を行った。

実は、4章で扱った拡散方程式は、原子炉の解析、という観点から見ると、一つ大きな点が抜けている。繰り返し述べてきたことではあるが、4章の拡散方程式は、全て固定中性子源を仮定したものであった。そこで5章では、原子炉の解析に適用できるように、拡散方程式を核分裂による中性子源を含む形に拡張する。

注4.17:たとえば、大型の加圧水型軽水炉を考える。炉心内には燃料棒が5万本以上あるため、これらの燃料棒一本ごとに空間メッシュを割りあてるとすると、原子炉の一つの水平断面を取り扱うだけでメッシュ点が5万点以上必要になる。実際は、反射体まで含めると、7万点弱のメッシュ点が必要となる。さらに、三次元的な解析を行うため、原子炉の軸方向に30点のメッシュをとると仮定すると、 $7万 \times 30 = 210万$ 点のメッシュ点が必要となる。すなわち、210万のメッシュ点における中性子束に対する連立方程式を解く必要が生じる。このような計算は、現代の計算機を用いれば実行可能ではある。しかし原子炉の炉心解析は拡散方程式を一回解けばよい、というのではなく、限られた時間内に計算条件を変えながら数百回~数千回も拡散方程式を解く必要がある。また、炉心解析を高速に行えるほど、様々な炉心の設計案を検討できるため、安全性・経済性に優れた炉心を設計することが可能となる。従って、多群拡散(輸送)方程式をいかに精度良く、効率的に解くかは原子炉物理にとって永遠の課題であり、現在もなお、精力的に研究が進められている。

《演習問題》

- [1] 〈例題4.5〉で扱った体系について、次の問いに答えよ。
- ①例題4.5の体系における中性子流の空間分布を計算せよ。
 - ②右側境界において、単位面積(1m^2)、単位時間(1s)あたりに体系から漏えいする中性子の数を求めよ。
 - ③発生した中性子が体系から漏えいする確率を求めよ。
 - ④体系内で発生した中性子数が、体系から漏えいする中性子の数と体系内で吸収される中性子の数の和に等しいことを証明せよ。
- [2] 無限均質体系中に、点状の等方中性子源が2つあり、 $a[\text{m}]$ だけ離れている。中性子源の強度を $S[1/\text{s}]$ 、媒質の拡散係数を $D[\text{m}]$ 、巨視的吸収断面積を $\Sigma_a[1/\text{m}]$ とすると、二つの中性子源の midpoint における中性子束と中性子流を求めよ。
- [3] 無限均質体系中に、点状の等方中性子源が4つあり、一辺 $a[\text{m}]$ からなる正方形をなしている。中性子源の強度を $S[1/\text{s}]$ 、媒質の拡散係数を $D[\text{m}]$ 、巨視的吸収断面積を $\Sigma_a[1/\text{m}]$ とすると、①正方形の一辺の midpoint における中性子束と中性子流、②正方形の重心における中性子束と中性子流を求めよ。
- [4] 4.3.3節の(3)で扱った半無限体系において、単位時間あたりに入射する中性子の数と、体系内で吸収される中性子の数が一致することを示せ。
- [5] 無限均質体系中に強度 $S[\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}]$ の無限の広がりを持つ面中性子源がある。中性子は面中性子源に対して垂直方向に放出される。体系の拡散係数を $D[\text{m}]$ 、巨視的吸収断面積を $\Sigma_a[1/\text{m}]$ とする。
- ①体系内の中性子束分布および中性子流分布を求めよ。
 - ②単位時間内に体系内で発生する中性子数が体系内で吸収される中性子数に等しいことを示せ。
- [6] 厚さ $2a$ の平板体系の中心に強度 $S[\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}]$ の面中性子源がある。中性子は面中性子源に対して垂直方向に放出される。平板体系の拡散係数を $D[\text{m}]$ 、巨視的吸収断面積を $\Sigma_a[1/\text{m}]$ とする。体系の端においては真空境界条件を仮定する。
- ①平板内の中性子束分布および中性子流分布を求めよ。なお、真空境界条件としては、(4.23)式を用いよ。
 - ②単位時間内に体系内で発生する中性子数が、体系から漏えいする中性子数と体系内で吸収される中性子数に等しいことを示せ。
- [7] 中性子源が既知の場合におけるエネルギー2群の拡散方程式を考える。
- ①2群の拡散方程式を書き下せ。なお、巨視的断面積などの記号については、(4.87)式に準ずること。
 - ②無限均質体系を考えたとき、各群の中性子束の値を求めよ。
 - ③厚さ $2a$ の平板体系を考える。零中性子束境界条件を仮定するとき、各群の中性子束分布を求めよ。ただし、
 - ・平板内は均質 (巨視的断面積や中性子源強度は平板内で一様)
 - ・中性子源は1群のみに存在する。
 - ・2群から1群への上方散乱は考慮しないものとする。