

近代ノード法と不連続因子の基礎

日本原子力研究所
奥村啓介¹

1. はじめに

近代ノード法と不連続因子の基礎は 1970 年代後半から 1980 年代前半にかけて完成されたと言える。最近の進展まで含めると関連する文献は相当な数であり、詳細に解説すれば、上下巻の分厚い教科書ができるほどである。残念ながら筆者が知る限りそのような便利のものは無く、近代ノード法を一から学ぼうとする場合に、どこから入って良いか迷う人も多いのではなかろうか？ 近代ノード法と不連続因子の概念を基礎から学ぼうとする人に推奨するレビュー論文として、R. D. Lawrence と K. S. Smith のもの^{1),2)}が挙げられる。本テキストの内容も、これらの論文に準じた内容としている(変数のノータシオンもほぼ同じとした)。

さて、有限差分法は空間を微小メッシュ空間に分割して微分方程式を解くもので、それ以外の近似を取り込む必要がないため、メッシュサイズが十分に小さければ厳密解に近づき、しばしば臨界集合体の解析や参照解の作成などに使用される。しかし、軽水炉のような体系では、中性子の平均自由行程が短いため、精度の良い解を得るためには 1cm~2cm 程度の詳細メッシュ分割を必要とする。例えば、炉心体積が 3 万リットル以上ある PWR 体系を 3 次元詳細メッシュを使用して解くには、反射体領域を除いても数千万ものメッシュ分割が必要となる。このため、中性子拡散方程式を何度も繰り返し解く必要がある核熱結合計算、炉心燃焼計算、空間依存動特性計算などでは、詳細メッシュを使用する 3 次元有限差分法コードを利用することは、現在の高速計算機をもってしても計算コストが大きくなりすぎて実用的ではない。そこで、燃料集合体の水平断面サイズ程度(~20cm)の粗いメッシュ分割で、高速かつ高精度な計算が可能な近代ノード法が開発され、現在の軽水炉設計などにおいて広く利用されている。

近代ノード法といっても様々な手法があるが、ここで採り上げるものは、多項式展開拡散ノード法(NEM : Nodal Expansion Method)と呼ばれるものであり、近代ノード法の基礎を築いた手法である。以下では、NEM を例として、近代ノード法と不連続因子の基礎理論、数値計算手法、ベンチマーク計算結果について概説する。

2. 横方向積分とノード平均パラメータ

問題とする体系が複数の粗メッシュノード(直方体要素)に分割されているものとする。今、 x 、 y 、 z 各方向のノードサイズが Δ_x^k 、 Δ_y^k 、 Δ_z^k である k 番目のノードに着目し、そのノード中心を座標中心にとれば、ノード内部の任意の点において、以下の中性子バランス式が成立する。

¹ okumura@mike.tokai.jaeri.go.jp

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} J_{g,x}^k(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y} J_{g,y}^k(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z} J_{g,z}^k(x,y,z) + \Sigma_{r,g}^k \phi_g^k(x,y,z) = Q_g^k(x,y,z) \\ \left(-\frac{1}{2}\Delta_x^k \leq x \leq \frac{1}{2}\Delta_x^k, \quad -\frac{1}{2}\Delta_y^k \leq y \leq \frac{1}{2}\Delta_y^k, \quad -\frac{1}{2}\Delta_z^k \leq z \leq \frac{1}{2}\Delta_z^k\right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 $\Sigma_{r,g}^k$ は除去断面積、 $Q_g^k(x,y,z)$ は中性子源項であり、それぞれ、以下の式で表される。

$$\Sigma_{r,g}^k \equiv \Sigma_{a,g}^k + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{s,g \rightarrow g'}^k \quad (2.2)$$

$$Q_g^k(x,y,z) \equiv \frac{x_g^k}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}^k \phi_{g'}^k(x,y,z) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g}^k \phi_{g'}^k(x,y,z) \quad (2.3)$$

(2.1)式左辺の漏洩項は Fick の法則により、例えば x 方向に対して次の式で表される。

$$J_{g,x}^k(x,y,z) = -D_{g,x}^k \frac{\partial}{\partial x} \phi_g^k(x,y,z) \quad (2.4)$$

ここで、(2.1)式と(2.4)式を、着目する x 方向以外の方向、即ち y 方向と z 方向についてノード内で積分し、その表面積 $\Delta_y^k \cdot \Delta_z^k$ で割れば、以下のような y 方向と z 方向への漏洩項を含む x 方向の 1 次元拡散方程式を得る。

$$\frac{d}{dx} \bar{J}_{g,x}^k(x) + \Sigma_{r,g}^k \bar{\phi}_{g,x}^k(x) = \bar{Q}_{g,x}^k(x) - \left\{ \frac{1}{\Delta_y^k} \bar{L}_{g,y}^k(x) + \frac{1}{\Delta_z^k} \bar{L}_{g,z}^k(x) \right\} \quad (2.5)$$

$$\bar{J}_{g,x}^k(x) = -D_{g,x}^k \frac{d}{dx} \bar{\phi}_{g,x}^k(x) \quad (2.6)$$

ここで、

$$\bar{\phi}_{g,x}^k(x) \equiv \frac{1}{\Delta_y^k \Delta_z^k} \int_{-\Delta_y^k/2}^{+\Delta_y^k/2} \int_{-\Delta_z^k/2}^{+\Delta_z^k/2} \phi_g^k(x,y,z) dy dz \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{g,x}^k(x) &= \frac{1}{\Delta_y^k \Delta_z^k} \int_{-\Delta_y^k/2}^{+\Delta_y^k/2} \int_{-\Delta_z^k/2}^{+\Delta_z^k/2} Q_g^k(x,y,z) dy dz \\ &= \frac{x_g^k}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}^k \bar{\phi}_{g'}^k(x) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g}^k \bar{\phi}_{g'}^k(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\bar{L}_{g,y}^k(x) \equiv \frac{1}{\Delta_z^k} \int_{-\Delta_z^k/2}^{+\Delta_z^k/2} \left[-D_{g,y}^k \frac{\partial \phi_g^k(x,y,z)}{\partial y} \right]_{-\Delta_y^k/2}^{+\Delta_y^k/2} dz \quad (2.9)$$

$$\bar{L}_{g,z}^k(x) \equiv \frac{1}{\Delta_y^k} \int_{-\Delta_y^k/2}^{+\Delta_y^k/2} \left[-D_{g,z}^k \frac{\partial \phi_g^k(x,y,z)}{\partial z} \right]_{-\Delta_z^k/2}^{+\Delta_z^k/2} dy \quad (2.10)$$

である。これらは、中性子束、中性子源、 y 方向及び z 方向の漏れの k 番目ノード内における x 方向分布を表すものである。

(2.5)式、あるいは(2.6)式を(2.5)式に代入したものを、 x 方向の横方向積分式 (Transverse-integrated equation) と呼ぶ。同様な式は y 方向と z 方向についても得られる。これら各方向に対する 1 次元式が近代拡散ノード法(以下では単純にノード法と呼ぶ)の出発式となる。

ノード法で扱う計算パラメータには、体積平均パラメータと表面平均パラメータとがある。これらのパラメータを以下に定義する。

$$\begin{aligned}\phi_{g,0}^k &\equiv \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} \bar{\phi}_g^k(x) dx \\ &= \frac{1}{\Delta_x^k \Delta_y^k \Delta_z^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} \int_{-\Delta_y^k/2}^{+\Delta_y^k/2} \int_{-\Delta_z^k/2}^{+\Delta_z^k/2} \phi_g^k(x, y, z) dx dy dz\end{aligned}\quad : \text{体積平均中性子束} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}Q_{g,0}^k &\equiv \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} \bar{Q}_g^k(x) dx \\ &= \frac{x_g^k}{k_{eff}^k} \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{f,g'}^k \phi_{g',0}^k + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^k \Sigma_{s,g' \rightarrow g}^k \phi_{g',0}^k\end{aligned}\quad : \text{体積平均中性子源} \quad (2.12)$$

$$\phi_{g,x\pm}^k \equiv \bar{\phi}_g^k(x = \pm \Delta_x^k/2) \quad : \text{表面平均中性子束 (x+面と x-面)} \quad (2.13)$$

$$J_{g,x\pm}^k \equiv \bar{J}_g^k(x = \pm \Delta_x^k/2) \quad : \text{表面平均正味中性子流 (x+面と x-面)} \quad (2.14)$$

後述する多項式展開ノード法では、図 1 に示すような各表面で面平均されたノード内部に向かう入射中性子流(J^{in})とノード外部に向かう放出中性子流(J^{out})を意味する表面平均部分中性子流を使用する。これらの差異が正味の表面平均中性子流となる。

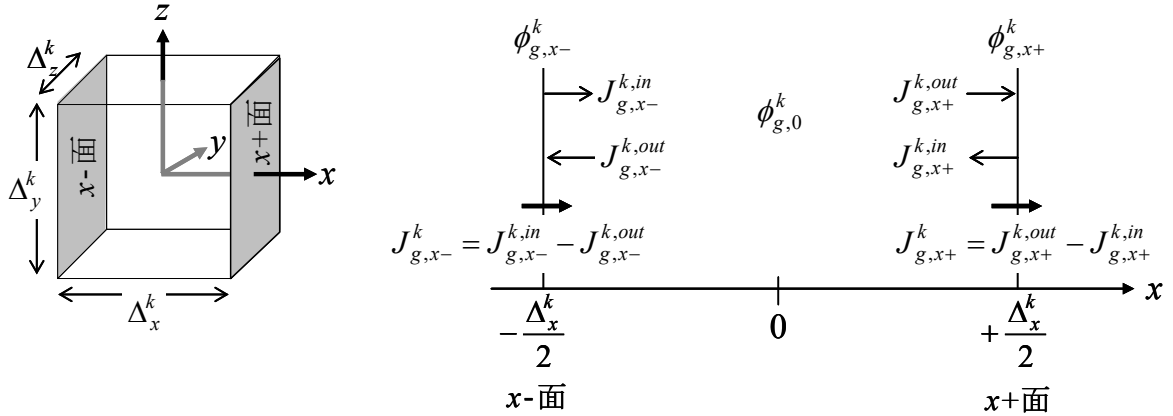


図 1 k 番目ノードのノード平均パラメータ

導出は省くが、表面平均中性子束と表面平均正味中性子流は、表面平均部分中性子流により、以下のように表すことができる³⁾。

$x+$ 面において、

$$J_{g,x+}^k = J_{g,x+}^{out,k} - J_{g,x+}^{in,k} \quad (2.15)$$

$$\phi_{g,x+}^k = 2(J_{g,x+}^{out,k} + J_{g,x+}^{in,k}) \quad (2.16)$$

x -面において、

$$J_{g,x-}^k = J_{g,x-}^{in,k} - J_{g,x-}^{out,k} \quad (2.17)$$

$$\phi_{g,x-}^k = 2(J_{g,x-}^{out,k} + J_{g,x-}^{in,k}) \quad (2.18)$$

更に、 y 方向及び z 方向の両境界面(y ±面と z ±面)からの正味中性子漏洩を表す以下のパラメータを定義しておく。

$$\begin{aligned} L_{g,y}^k &\equiv \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} \bar{L}_{g,y}^k(x) dx \\ &= \frac{1}{\Delta_x^k \Delta_z^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} \int_{-\Delta_z^k/2}^{+\Delta_z^k/2} \left[-D_{g,y}^k \frac{\partial \phi_g^k(x,y,z)}{\partial y} \right]_{-\Delta_y^k/2}^{+\Delta_y^k/2} dx dz = J_{g,y+}^k - J_{g,y-}^k \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$L_{g,z}^k \equiv \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} \bar{L}_{g,z}^k(x) dx = J_{g,z+}^k - J_{g,z-}^k \quad (2.20)$$

以上のパラメータは、 x 方向に着目した場合のものであるが、同様なパラメータは y 方向と z 方向に対しても定義される。

(2.5)式を更に x 方向について積分、あるいは(2.1)式を全方向で体積積分すれば、

$$\frac{1}{\Delta_x^k} (J_{g,x+}^k - J_{g,x-}^k) + \frac{1}{\Delta_y^k} (J_{g,y+}^k - J_{g,y-}^k) + \frac{1}{\Delta_z^k} (J_{g,z+}^k - J_{g,z-}^k) + \Sigma_{r,g}^k \phi_{g,0}^k = Q_{g,0}^k \quad (2.21)$$

を得る。あるいは、部分中性子流を使って、以下の様に表すことができる。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta_x^k} (J_{g,x+}^{out,k} - J_{g,x+}^{in,k} - J_{g,x-}^{in,k} + J_{g,x-}^{out,k}) + \frac{1}{\Delta_y^k} (J_{g,y+}^{out,k} - J_{g,y+}^{in,k} - J_{g,y-}^{in,k} + J_{g,y-}^{out,k}) \\ &+ \frac{1}{\Delta_z^k} (J_{g,z+}^{out,k} - J_{g,z+}^{in,k} - J_{g,z-}^{in,k} + J_{g,z-}^{out,k}) + \Sigma_{r,g}^k \phi_{g,0}^k = Q_{g,0}^k \end{aligned} \quad (2.22)$$

これはノードバランス式(ゼロ次)と呼ばれ、中性子源 $Q_{g,0}^k$ が与えられた時、各ノード表面での部分中性子流(あるいは正味中性子流)が得られれば、本式によりノード体積平均中性子束 $\phi_{g,0}^k$ が求められる。

3. ノード内 1次元中性子束分布の関数展開

3.1. 代表的なノード法

ここまでの話では、拡散近似以外の本質的な近似を取り込んでいない。3次元拡散方程式から各方向に対する1次元横方向積分式を導く際にも、ノード内中性子束分布の変数分離を仮定しているわけではない。ノード法では、1次元の中性子束 $\bar{\phi}_{g,x}^k(x)$ や中性子源 $Q_{g,x}^k(x)$ の分布表現において近似を導入するが、その表現方法や扱うパラメータの違いによって、幾つかのノード法のバリエーションがあり、大きく分けて以下の3種類に分類される。

① 解析的ノード法

横方向の漏洩項(2.5 式の右辺第 2 項)を 2 次の直交多項式で近似(QTL 近似：第 5.3 節参照)するが、他は全て解析的に解く(2 群)。QTL 以外の近似を持ち込まないため精度は高く、横方向漏洩が無い 1 次元問題では参照解を与える。ただし、ノード平均パラメータ間の関係式が複雑で、3 群以上への拡張は困難である。

② 多項式展開ノード法(NEM)

$\bar{\phi}_{g,x}^k(x)$ を N 次の多項式(一般に $N=4$)で展開して表現する。横方向の漏洩項は QTL 近似で扱う。熱群中性子束分布 $\bar{\phi}_{g,x}^k(x)$ の精度は解析的な手法に比べて劣るが、多群化や六角形状ノード法への拡張性が良い⁴⁾。

③ 解析的多項式ノード法⁵⁾

横方向の漏洩項を QTL 近似、中性子源項 $Q_{g,x}^k(x)$ を N 次の直交多項式(一般に $N=2$)で近似し、中性子束分布 $\bar{\phi}_{g,x}^k(x)$ は解析的に表現する。これは①と②の長所を生かした手法であり、近年の軽水炉設計コードで利用されている⁶⁾。

これら以外にも、グリーン関数を使用する解析的ノード法⁷⁾、横方向積分を使用しないでノード内の 3 次元分布を直接高次の多項式で展開する手法⁸⁾などがある。

一般に何れの手法も展開次数を上げるかメッシュサイズを小さくすることで精度が向上する。展開次数を上げると、高次の展開係数などを決定するための計算コスト(記憶容量と計算時間)が増大する。したがって、メッシュサイズを小さくして精度を上げることによるコスト増と高次化によるコスト増とのバランスにより最適な展開次数を決めることになる。最適な手法や展開次数は解析対象とする炉型に依存する他、並列計算や大容量メモリなどの進歩が著しい昨今では、使用する計算機の仕様にも依存する。

3.2. 中性子束分布の多項式展開

NEM では、(3.1)式に示すように、ノード内の 1 次元中性子束分布を多項式で近似する。

$$\bar{\phi}_{g,x}^k(x) \approx \sum_{n=0}^N a_{g,x,n}^k f_n(x) \quad (3.1)$$

$f_n(x)$ は多項式による展開関数であり、 $a_{g,x,n}^k$ はその係数である。ただし、(3.1)式は常に(2.11)式を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} \phi_{g,0}^k &= \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{\Delta_x^k/2} \bar{\phi}_{g,x}^k(x) dx \\ &\approx \frac{a_{g,x,0}^k}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{\Delta_x^k/2} f_0(x) dx + \sum_{n=1}^N \frac{a_{g,x,n}^k}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{\Delta_x^k/2} f_n(x) dx \end{aligned} \quad (3.2)$$

よって、定数項は必然的に

$$a_{g,x,0}^k = \phi_{g,0}^k \quad (3.3)$$

として決まり、以下の式を満足する展開関数を選択する。

$$\frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{\Delta_x^k/2} f_n(x) dx = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n=1,2,\dots,N) \end{cases} \quad (3.4)$$

展開次数 N や関数形 $f_n(x)$ の選択、さらには後に述べる重み付き残差法における重み関数の採り方により、多項式展開ノード法にもいくつかのバリエーションを与えることになる。それらを最適化することが計算を効率的に行う上で重要となる。以下では、NEM で最もオーソドックスな(3.5)式に示す 4 次の展開関数を用いる。

$$f_0(x) \equiv 1 \quad [1] \quad (3.5a)$$

$$f_1(x) \equiv \xi \quad [2u - 1] \quad (3.5b)$$

$$f_2(x) \equiv 3\xi^2 - \frac{1}{4} \quad [6u(1-u) - 1] \quad (3.5c)$$

$$f_3(x) \equiv \xi \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \quad [6u(1-u)(2u-1)] \quad (3.5d)$$

$$f_4(x) \equiv \left(\xi^2 - \frac{1}{20} \right) \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \quad [6u(1-u)(5u^2 - 5u + 1)] \quad (3.5e)$$

ここでは原点をノード中心にとり、注目方向のノード幅に対する相対座標 ξ の関数として表示した。

$$\xi \equiv \frac{x}{\Delta_x^k}, \quad \left(-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right) \quad [u \equiv \xi + \frac{1}{2}, \quad (0 \leq u \leq 1)] \quad (3.6)$$

なお、文献によっては、ノード境界を原点とするノード幅に対する相対座標 u の関数として表現されることも多い。この場合には、[]内の式が使用されるが、係数値は変わるが関数形は同一である。これらの関数は 3 次以上で直交関数ではなく、

$$\text{記号 } \langle \rangle \equiv \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} d\xi \text{ とすると、以下の関係がある。}$$

$$\langle f_0(x)f_0(x) \rangle = \langle f_0(x) \rangle = 1, \quad \langle f_0(x)f_1(x) \rangle = \langle f_1(x) \rangle = 0, \quad \langle f_0(x)f_2(x) \rangle = \langle f_2(x) \rangle = 0, \\ \langle f_0(x)f_3(x) \rangle = \langle f_3(x) \rangle = 0, \quad \langle f_0(x)f_4(x) \rangle = \langle f_4(x) \rangle = 0 \quad (3.7a)$$

$$\langle f_1(x)f_1(x) \rangle = \frac{1}{12}, \quad \langle f_1(x)f_2(x) \rangle = 0, \quad \langle f_1(x)f_3(x) \rangle = \frac{-1}{120}, \quad \langle f_1(x)f_4(x) \rangle = 0 \quad (3.7b)$$

$$\langle f_2(x)f_2(x) \rangle = \frac{1}{20}, \quad \langle f_2(x)f_3(x) \rangle = 0, \quad \langle f_2(x)f_4(x) \rangle = \frac{-1}{700} \quad (3.7c)$$

これらの関係式は、後で述べる重み付残差法で使用する。4 次の多項式展開により、(3.1)式は以下のような具体的に表現を得る。

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{g,x}^k(x) \approx & \phi_{g,0}^k + a_{g,x,1}^k \xi + a_{g,x,2}^k \left(3\xi^2 - \frac{1}{4}\right) \\ & + a_{g,x,3}^k \left\{ \xi \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \right\} + a_{g,x,4}^k \left\{ \left(\xi^2 - \frac{1}{20} \right) \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \right\}\end{aligned}\quad (3.8)$$

$a_{g,x,0}^k$ はノード体積平均中性子束と一致するように決められたが、 $a_{g,x,1}^k$ と $a_{g,x,2}^k$ は、 x 方向ノード境界面での表面平均中性子束により決められる。すなわち、

$$\bar{\phi}_{g,x}^k \left(x = \pm \frac{\Delta_x^k}{2} \right) = \phi_{g,x\pm}^k \quad (3.9)$$

の両境界条件を(3.8)式に適用して、 $a_{g,x,1}^k$ と $a_{g,x,2}^k$ について求めると、

$$a_{g,x,1}^k = \phi_{g,x+}^k - \phi_{g,x-}^k \quad (3.10)$$

$$a_{g,x,2}^k = \phi_{g,x+}^k + \phi_{g,x-}^k - 2\phi_{g,0}^k \quad (3.11)$$

を得る。残された展開係数である $a_{g,x,3}^k$ と $a_{g,x,4}^k$ を他の係数と同様にノード平均パラメータで表現したいところであるが、これについては第4章に譲り、NEMが内部反復計算(体系スイープ)に使用する表面平均部分中性子流と展開係数の関係式を得ておく。

まず、(3.10)式と(3.11)式は、(2.16)式と(2.18)式により、次のように表される。

$$a_{g,x,1}^k = 2(J_{g,x+}^{out,k} + J_{g,x+}^{in,k}) - 2(J_{g,x-}^{out,k} + J_{g,x-}^{in,k}) \quad (3.12)$$

$$a_{g,x,2}^k = 2(J_{g,x+}^{out,k} + J_{g,x+}^{in,k}) + 2(J_{g,x-}^{out,k} + J_{g,x-}^{in,k}) - 2\phi_{g,0}^k \quad (3.13)$$

次に $x+$ 境界面に着目すると、(2.15)式と(2.6)式により、

$$\begin{aligned}J_{g,x+}^{out,k} &= J_{g,x+}^k + J_{g,x+}^{in,k} \\ &= -D_{g,x}^k \frac{d}{dx} \bar{\phi}_{g,x}^k(x) \Big|_{x=\frac{\Delta_x^k}{2}} + J_{g,x+}^{in,k}\end{aligned}\quad (3.14)$$

となる。これに(3.8)式を代入し、(3.12)式と(3.13)式により $a_{g,x,1}^k$ と $a_{g,x,2}^k$ を消去すれば、以下の式を得る。

$$J_{g,x+}^{out,k} \approx -\frac{D_{g,x}^k}{\Delta_x^k} \left\{ 8J_{g,x+}^{out,k} + 8J_{g,x+}^{in,k} + 4J_{g,x-}^{out,k} + 4J_{g,x-}^{in,k} - 6\phi_{g,0}^k + \frac{1}{2}a_{g,x,3}^k + \frac{1}{5}a_{g,x,4}^k \right\} + J_{g,x+}^{in,k} \quad (3.15)$$

$x-$ 境界面についても同様に、

$$J_{g,x-}^{out,k} \approx \frac{D_{g,x}^k}{\Delta_x^k} \left\{ -4J_{g,x+}^{out,k} - 4J_{g,x+}^{in,k} - 8J_{g,x-}^{out,k} - 8J_{g,x-}^{in,k} + 6\phi_{g,0}^k + \frac{1}{2}a_{g,x,3}^k - \frac{1}{5}a_{g,x,4}^k \right\} + J_{g,x-}^{in,k} \quad (3.16)$$

を得る。 y 方向と z 方向についてもこれらと同様な関係式が得られる。

3.3. 1次元問題における2次の多項式展開

ここでは、理解を促すために x 方向 1次元問題で、展開次数が 2 の場合を考察する。すなわち、(3.8)式において $a_{g,x,3}^k$ と $a_{g,x,4}^k$ が共にゼロであり、(3.15)式と(3.16)式は、それぞれ(3.17)式と(3.18)式のように簡略化される。また、(2.22)式のノードバランス式は、1次元問題では(3.19)式となる。

$$J_{g,x+}^{out,k} \approx -\frac{D_{g,x}^k}{\Delta_x^k} \left\{ 8J_{g,x+}^{out,k} + 8J_{g,x+}^{in,k} + 4J_{g,x-}^{out,k} + 4J_{g,x-}^{in,k} - 6\phi_{g,0}^k \right\} + J_{g,x+}^{in,k} \quad (3.17)$$

$$J_{g,x-}^{out,k} \approx \frac{D_{g,x}^k}{\Delta_x^k} \left\{ -4J_{g,x+}^{out,k} - 4J_{g,x+}^{in,k} - 8J_{g,x-}^{out,k} - 8J_{g,x-}^{in,k} + 6\phi_{g,0}^k \right\} + J_{g,x-}^{in,k} \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{\Delta_x^k} \left(J_{g,x+}^{out,k} - J_{g,x+}^{in,k} - J_{g,x-}^{in,k} + J_{g,x-}^{out,k} \right) + \Sigma_{r,g}^k \phi_{g,0}^k = Q_{g,0}^k \quad (3.19)$$

今、図 2 に示すノード総数が 4 個の 1次元問題を考えると、 $k=1, 2, 3, 4$ の各ノードに対し、(3.17)~(3.19)式が成立し、12 個の方程式が与えられる。

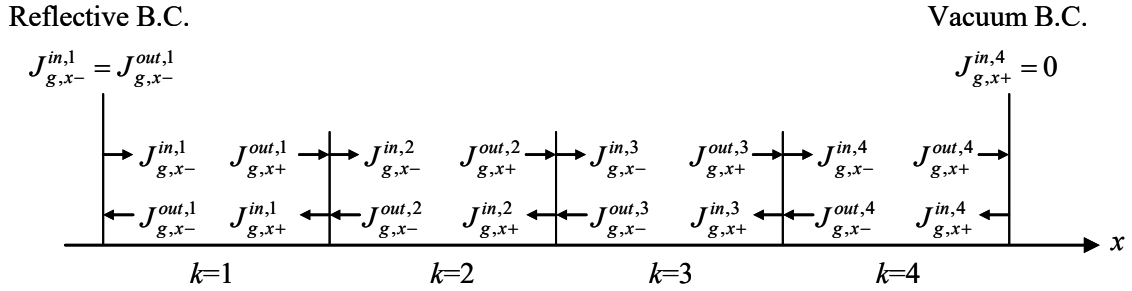


図 2 1次元4ノード問題の部分中性子流

一方、 $Q_{g,0}^k$ が既知である固定源問題を仮定すると未知数は以下のとおりである。

- 1 番目ノードに対し、 $J_{g,x-}^{out,1}, J_{g,x-}^{in,1}, J_{g,x+}^{out,1}, J_{g,x+}^{in,1}, \phi_{g,0}^1$
- 2 番目ノードに対し、 $(J_{g,x-}^{out,2} = J_{g,x+}^{in,1}), (J_{g,x-}^{in,2} = J_{g,x+}^{out,1}), J_{g,x+}^{out,2}, J_{g,x+}^{in,2}, \phi_{g,0}^2$
- 3 番目ノードに対し、 $(J_{g,x-}^{out,3} = J_{g,x+}^{in,2}), (J_{g,x-}^{in,3} = J_{g,x+}^{out,2}), J_{g,x+}^{out,3}, J_{g,x+}^{in,3}, \phi_{g,0}^3$
- 4 番目ノードに対し、 $(J_{g,x-}^{out,4} = J_{g,x+}^{in,3}), (J_{g,x-}^{in,4} = J_{g,x+}^{out,3}), J_{g,x+}^{out,4}, J_{g,x+}^{in,4}, \phi_{g,0}^4$

()内は部分中性子流のノード境界における連続条件である。結局、未知数の数は ()内を除く 14 個となるが、方程式の不足分は体系両端の外部境界条件により与えられる。例えば、左側境界を反射境界条件、右側境界を真空境界条件とすれば、 $J_{g,x-}^{in,1} = J_{g,x-}^{out,1}$ と $J_{g,x+}^{in,4} = 0$ の 2 つの式が与えられ、未知数と方程式の数が過不足なくなる。これにより、体系全体のノード平均中性子束と部分中性子流が求められる。

$Q_{g,0}^k$ を既知としたが、固有値問題の場合には、 $Q_{g,0}^k$ の初期値を与えて得られるノー

ド平均中性子束を(2.11)式に代入し、 $Q_{g,0}^k$ を更新して外部反復計算を行えば良い。また、3次元問題の場合にも、同様に計算することができる。

ノード境界における部分中性子流の連続は、(2.15)式～(2.18)式から、ノード境界における中性子束と正味中性子流の連続条件と等価である。すなわち、 $N=2$ の低次の多項式展開ノード法では、ノード境界での中性子束と正味中性子流の連続性を保証しながら、体系全体で中性子バランス式(3.19式)を満足させれば、方程式と未知数の数が一致し、拡散方程式の解を得ることができる。これは、扱う変数が部分中性子流であることを除けば、通常の有限差分法とほとんど同じプロセスである。なお、ノード内の中性子束分布は2次式で与えられるが、これはノード内の拡散方程式をなんら満足することを保証していない。したがって、2次の多項式展開で正確な解を得るためには、有限差分法と同様にノード幅を十分に小さくする必要がある。

4. 重み付き残差法

ここで再び3次元問題に対する4次の多項式展開に話を戻す。とりあえず x 方向に着目して、高次の展開係数 $a_{g,x,3}^k$ と $a_{g,x,4}^k$ をノード平均パラメータと関係付けたいが、前節で示したように $N=2$ の場合に既に方程式と未知数の数が一致しており、何らかの新しい条件式が必要になる。そこで、ノード内の1次元中性子束分布 $\bar{\phi}_{g,x}^k(x)$ を近似的に拡散方程式に従わせようとの意図から重み付き残差法を導入する。

$\bar{\phi}_{g,x}^k(x)$ の4次多項式による展開式(3.8式)は、支配方程式(2.5式)の厳密解ではないため、これを(2.5)式に代入しても残差 R が残る。重み付残差法とは、この残差に適当な重み関数 w を乗じて領域内で積分してゼロとすることにより($\int R \cdot w d\mathbf{r} = 0$)、支配方程式が近似的に成立する展開係数を決定しようとする方法である。これを(2.5)式に適用し、重み関数 $w_n(x)$ を乗じてノード内で積分し Δ_x^k で割れば、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} R \cdot w_n(x) dx \\ & \equiv \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} w_n(x) \left\{ \frac{d}{dx} \bar{J}_{g,x}^k(x) + \Sigma_{r,g}^k \bar{\phi}_{g,x}^k(x) \right\} dx \\ & \quad - \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} w_n(x) \left\{ \bar{Q}_{g,x}^k(x) - \frac{1}{\Delta_y^k} \bar{L}_{g,y}^k(x) - \frac{1}{\Delta_z^k} \bar{L}_{g,z}^k(x) \right\} dx = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで、記号 $\langle \rangle \equiv \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} dx = \int_{-1/2}^{+1/2} d\xi$ とおき、以下の諸量を定義しておく。

$$\langle w_n(x), \bar{\phi}_{g,x}^k(x) \rangle \equiv \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} w_n(x) \bar{\phi}_{g,x}^k(x) dx \equiv \phi_{g,xn}^k \quad (4.2)$$

$$\langle w_n(x), \bar{Q}_{g,x}^k(x) \rangle \equiv \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} w_n(x) \bar{Q}_{g,x}^k(x) dx \equiv Q_{g,xn}^k \quad (4.3)$$

$$\left\langle w_n(x), \bar{L}_{g,y}^k(x) \right\rangle \equiv \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} w_n(x) \bar{L}_{g,y}^k(x) dx \equiv L_{g,y,xn}^k \quad (4.4)$$

$$\left\langle w_n(x), \bar{L}_{g,z}^k(x) \right\rangle \equiv \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{+\Delta_x^k/2} w_n(x) \bar{L}_{g,z}^k(x) dx \equiv L_{g,z,xn}^k \quad (4.5)$$

これらを使用して(4.1)式を書き換えると、

$$\left\langle w_n(x), \frac{d}{dx} \bar{J}_{g,x}^k(x) \right\rangle + \sum_{r,g}^k \phi_{g,xn}^k = Q_{g,xn}^k - \frac{1}{\Delta_y^k} L_{g,y,xn}^k - \frac{1}{\Delta_z^k} L_{g,z,xn}^k \quad (4.6)$$

となる。この式は n 次のモーメントバランス式と呼ばれ、 $w_0(x) \equiv 1$ とすれば、ノードバランス式(2.21)に一致する。展開係数 $a_{g,x,3}^k$ と $a_{g,x,4}^k$ を求めるためには、2 つの重み関数 $w_1(x)$ 、 $w_2(x)$ を与える必要があるが、その与え方により NEM のバリエーションが増え、計算の精度にも影響する。多くの場合、(3.5)式で定義した 1 次及び 2 次の展開関数を重み関数として使用する。これは数値計算による経験に基づいている。

$$w_1(x) \equiv f_1(x) \quad (4.7a)$$

$$w_2(x) \equiv f_2(x) \quad (4.7b)$$

(4.6)式に(4.7a)式と(4.7b)式をそれぞれ代入して整理すると、以下の 1 次及び 2 次のモーメントバランス式を得る。($a_{g,x,1}^k$ が現れるのは(3.10)式を使用したためである。)

$$\frac{1}{2\Delta_x^k} (J_{g,x+}^k + J_{g,x-}^k) + \frac{1}{\Delta_x^k} \frac{D_{g,x}^k}{\Delta_x^k} a_{g,x,1}^k + \sum_{r,g}^k \phi_{g,x1}^k = Q_{g,x1}^k - \frac{1}{\Delta_y^k} L_{g,y,x1}^k - \frac{1}{\Delta_z^k} L_{g,z,x1}^k \quad (4.8a)$$

$$\frac{1}{2\Delta_x^k} (J_{g,x+}^k + J_{g,x-}^k) + \frac{1}{\Delta_x^k} \frac{D_{g,x}^k}{\Delta_x^k} a_{g,x,1}^k + \sum_{r,g}^k \phi_{g,x2}^k = Q_{g,x2}^k - \frac{1}{\Delta_y^k} L_{g,y,x2}^k - \frac{1}{\Delta_z^k} L_{g,z,x2}^k \quad (4.8b)$$

また、(2.8)式を(4.3)式に代入すれば、モーメント中性子源はモーメント中性子束を使用して以下のように表される。

$$Q_{g,x1}^k = \frac{\chi_g^k}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}^k \phi_{g',x1}^k + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g}^k \phi_{g',x1}^k \quad (4.9a)$$

$$Q_{g,x2}^k = \frac{\chi_g^k}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}^k \phi_{g',x2}^k + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g}^k \phi_{g',x2}^k \quad (4.9b)$$

次に、4 次式に展開された 1 次元中性子束分布(3.8)式を(4.2)式に代入すれば、展開係数 $a_{g,x,3}^k$ および $a_{g,x,4}^k$ と新たに現れたモーメント中性子束との関係式が得られる。

$$\phi_{g,x1}^k = \left\langle f_1(x), \phi_{g,0}^k + \sum_{n=1}^4 a_{g,x,n}^k f_n(x) \right\rangle = \frac{1}{12} a_{g,x,1}^k - \frac{1}{120} a_{g,x,3}^k \quad (4.10a)$$

$$\phi_{g,x2}^k = \left\langle f_2(x), \phi_{g,0}^k + \sum_{n=1}^4 a_{g,x,n}^k f_n(x) \right\rangle = \frac{1}{20} a_{g,x,2}^k - \frac{1}{700} a_{g,x,4}^k \quad (4.10b)$$

よって、3次及び4次の展開係数は以下のように表される。

$$a_{g,x,3}^k = -120\phi_{g,x,1}^k + 10a_{g,x,1}^k \quad (4.11a)$$

$$a_{g,x,4}^k = -700\phi_{g,x,2}^k + 35a_{g,x,2}^k \quad (4.11b)$$

更に、これらの式と(3.12)式及び(3.13)式を使用して、(4.8)式から展開係数を全て消去すると、以下の式を得る。これらは、1次及び2次のモーメントバランス式を部分中性子流で表現したものである。

$$J_{g,x+}^{out,k} = \frac{D_{g,x}^k}{\Delta_x^k} \left\{ -32J_{g,x+}^{out,k} - 32J_{g,x+}^{in,k} - 8J_{g,x-}^{out,k} - 8J_{g,x-}^{in,k} + 20\phi_{g,0}^k + 60\phi_{g,x,1}^k + 140\phi_{g,x,2}^k \right\} + J_{g,x+}^{in,k} \quad (4.12a)$$

$$J_{g,x-}^{out,k} = \frac{D_{g,x}^k}{\Delta_x^k} \left\{ -8J_{g,x+}^{out,k} - 8J_{g,x+}^{in,k} - 32J_{g,x-}^{out,k} - 32J_{g,x-}^{in,k} + 20\phi_{g,0}^k - 60\phi_{g,x,1}^k + 140\phi_{g,x,2}^k \right\} + J_{g,x-}^{in,k} \quad (4.12b)$$

以上の式は、 x 方向に着目して得られた式であるが、 y 方向と z 方向についても同様な関係式が得られる。結局、1つのノードバランス式の他に、6つのモーメントバランス式が得られることになる。式が煩雑になったが、各方向に対する3次及び4次の展開係数を求めるために重み付き残差法を導入して、ノード内の中性子束分布が拡散方程式を近似的に満足するように方程式の数を増やしたわけである。このことは、粗メッシュを使用する代償として、ノードバランス式に加えて解くべき方程式の数が増えたことを意味する。したがって、最終的に得られる計算精度を度外視するならば、同じメッシュサイズを使用する有限差分法(または2次のNEM)の方が、余分な方程式を解く必要がない分、計算時間は速くなる。しかし十分な精度を得ようとする場合、粗メッシュを使用して余分な方程式を解く手間は、メッシュを細かくしてノードバランス式だけで解く手間に比べるとはるかに小さい。このことが近代ノード法を優れた解法にしていると言える。

5. 部分中性子流による応答係数

ここでは、NEMにおいて内部反復計算に使用する式を導出する。

5.1. 2次の多項式展開における応答係数

まず、2次のNEMの場合を考える。ノードバランス式(2.22)をノード平均中性子束について整理すると、

$$\phi_{g,0}^k = \frac{1}{\Sigma_{r,g}^k} \left\{ Q_{g,0}^k - \frac{1}{\Delta_x^k} \left(J_{g,x+}^{out,k} - J_{g,x+}^{in,k} + J_{g,x-}^{out,k} - J_{g,x-}^{in,k} \right) - \frac{1}{\Delta_y^k} \left(J_{g,y+}^{out,k} - J_{g,y+}^{in,k} + J_{g,y-}^{out,k} - J_{g,y-}^{in,k} \right) - \frac{1}{\Delta_z^k} \left(J_{g,z+}^{out,k} - J_{g,z+}^{in,k} + J_{g,z-}^{out,k} - J_{g,z-}^{in,k} \right) \right\} \quad (5.1)$$

を得る。これを、(3.17)式及び(3.18)式に代入する。同様なことを y 方向と z 方向についても行い、これら計6つの式を整理すると、最終的に以下のような行列式を得る。

$$[A_g^k] \bar{J}_g^{out,k} = [B_g^k] \bar{J}_g^{in,k} + [C_g^k] \bar{Q}_g^k \quad (5.2)$$

ここで、 $[A_g^k]$ と $[B_g^k]$ は何れも 6×6 の行列であり、その行列要素³⁾はノード k の断面積(拡散係数と除去断面積)と各方向のノードサイズのみで依存する。また、 $[C_g^k]$ は 1×6 の行列であり、やはり断面積とノードサイズのみで決定される。 $\bar{J}_g^{out,k}$ 、 $\bar{J}_g^{in,k}$ 、 \bar{Q}_g^k は 6×1 の縦ベクトルであるが、紙面節約のために、以下のように記号”col”を使用して横表記とする。

$$\bar{J}_g^{out,k} \equiv col [J_{g,x+}^{out,k}, J_{g,x-}^{out,k}, J_{g,y+}^{out,k}, J_{g,y-}^{out,k}, J_{g,z+}^{out,k}, J_{g,z-}^{out,k}] \quad (5.3)$$

$$\bar{J}_g^{in,k} \equiv col [J_{g,x+}^{in,k}, J_{g,x-}^{in,k}, J_{g,y+}^{in,k}, J_{g,y-}^{in,k}, J_{g,z+}^{in,k}, J_{g,z-}^{in,k}] \quad (5.4)$$

$$\bar{Q}_g^k \equiv col [Q_{g,0}^k, Q_{g,0}^k, Q_{g,0}^k, Q_{g,0}^k, Q_{g,0}^k, Q_{g,0}^k] \quad (5.5)$$

(5.2)式を変形して、2次のNEMの内部反復計算に使用する以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{J}_g^{out,k} &= [A_g^k]^{-1} [B_g^k] \bar{J}_g^{in,k} + [A_g^k]^{-1} [C_g^k] \bar{Q}_g^k \\ &= [P_g^k] \bar{J}_g^{in,k} + [R_g^k] \bar{Q}_g^k \end{aligned} \quad (5.6)$$

$[P_g^k] = [A_g^k]^{-1} [B_g^k]$ と $[R_g^k] = [A_g^k]^{-1} [C_g^k]$ が内部反復計算に使用する応答係数であるが、これは断面積が与えられた段階で予め体系全体について求めておくことができる。

外部反復計算において $Q_{g,0}^k$ ($k=1,2,\dots,K$)と $J_{g,u\pm}^{in,k}$ ($k=1,2,\dots,K$, $u=x,y,z$)の初期値または更新値が与えられた場合、内部反復計算は以下のように行われる。

- (a) (5.6)式により、 $J_{g,u\pm}^{out,k}$ ($k=1,2,\dots,K$, $u=x,y,z$)を更新する。
- (b) 境界条件及び隣接ノード境界面における部分中性子流の連続条件から $J_{g,u\pm}^{in,k}$ ($k=1,2,\dots,K$)を更新する。
- (c) 更新された $J_{g,u\pm}^{out,k}$ と $J_{g,u\pm}^{in,k}$ を(5.1)式に代入して $\phi_{g,0}^k$ ($k=1,2,\dots,K$, $u=x,y,z$)を更新する。
- (d) 内部反復計算として $\phi_{g,0}^k$ の収束判定をする。内部反復回数の上限内で収束していなければ(a)に戻る。

全群について内部反復計算が終了したら(2.12)式により $Q_{g,0}^k$ ($k=1,2,\dots,K$)を更新し、次の外部反復計算に移る。

5.2. 4次の多項式展開における応答係数

次に4次のNEMの場合を考える。(4.8a)式及び(4.8b)式から(3.12)式により $a_{g,x,1}^k$ を消去すれば、以下の2式を得る。

$$\phi_{g,x1}^k = \frac{1}{\Sigma_{r,g}^k} \left\{ Q_{g,x1}^k - L_{g,x1}^k - \frac{1}{2\Delta_x^k} (J_{g,x+}^{out,k} - J_{g,x+}^{in,k} - J_{g,x-}^{out,k} + J_{g,x-}^{in,k}) \right. \\ \left. - \frac{2D_{g,x}^k}{(\Delta_x^k)^2} (J_{g,x+}^{out,k} + J_{g,x+}^{in,k} - J_{g,x-}^{out,k} - J_{g,x-}^{in,k}) \right\} \quad (5.7)$$

$$\phi_{g,x2}^k = \frac{1}{\Sigma_{r,g}^k} \left\{ Q_{g,x2}^k - L_{g,x2}^k - \frac{1}{2\Delta_x^k} (J_{g,x+}^{out,k} - J_{g,x+}^{in,k} + J_{g,x-}^{out,k} - J_{g,x-}^{in,k}) \right. \\ \left. - \frac{6D_{g,x}^k}{(\Delta_x^k)^2} (J_{g,x+}^{out,k} + J_{g,x+}^{in,k} + J_{g,x-}^{out,k} + J_{g,x-}^{in,k} - \phi_{g,0}^k) \right\} \quad (5.8)$$

$$L_{g,xn}^k \equiv \frac{1}{\Delta_y^k} L_{g,y,xn}^k + \frac{1}{\Delta_z^k} L_{g,z,xn}^k \quad (n=1,2) \quad (5.9)$$

(5.1)式、(5.7)式、(5.8)式を(4.12a)式に代入して、 $\phi_{g,0}^k$ 、 $\phi_{g,1}^k$ 、 $\phi_{g,2}^k$ を消去し、部分中性子流に関して整理する。次に同じ式を(4.12b)式に代入して同様に整理する。y 方向及び z 方向についても同様の式が得られ、計 6 つの式が得られる。これを行列表式で表すと以下のようなになる。

$$[A_g^k] \vec{J}_g^{out,k} = [B_g^k] \vec{J}_g^{in,k} + [C_g^k] (\vec{Q}_g^k - \vec{L}_g^k) \quad (5.10)$$

$$\vec{J}_g^{out,k} = [A_g^k]^{-1} [B_g^k] \vec{J}_g^{in,k} + [A_g^k]^{-1} [C_g^k] (\vec{Q}_g^k - \vec{L}_g^k) \\ = [P_g^k] \vec{J}_g^{in,k} + [R_g^k] (\vec{Q}_g^k - \vec{L}_g^k) \quad (5.11)$$

ただし、

$$\vec{J}_g^{out,k} \equiv \text{col} [J_{g,x+}^{out,k}, J_{g,x-}^{out,k}, J_{g,y+}^{out,k}, J_{g,y-}^{out,k}, J_{g,z+}^{out,k}, J_{g,z-}^{out,k}] \quad (5.12)$$

$$\vec{J}_g^{in,k} \equiv \text{col} [J_{g,x+}^{in,k}, J_{g,x-}^{in,k}, J_{g,y+}^{in,k}, J_{g,y-}^{in,k}, J_{g,z+}^{in,k}, J_{g,z-}^{in,k}] \quad (5.13)$$

$$\vec{Q}_g^k \equiv \text{col} [Q_{g,0}^k, Q_{g,x1}^k, Q_{g,y1}^k, Q_{g,z1}^k, Q_{g,x2}^k, Q_{g,y2}^k, Q_{g,z2}^k] \\ = \frac{\chi_g^k}{k_{eff}^k} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}^k \vec{\phi}_{g'}^k + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g}^k \vec{\phi}_{g'}^k \quad (5.14)$$

$$\vec{\phi}_g^k \equiv \text{col} [\phi_{g,0}^k, \phi_{g,x1}^k, \phi_{g,y1}^k, \phi_{g,z1}^k, \phi_{g,x2}^k, \phi_{g,y2}^k, \phi_{g,z2}^k] \quad (5.15)$$

$$\vec{L}_g^k \equiv \text{col} [0, L_{g,x1}^k, L_{g,y1}^k, L_{g,z1}^k, L_{g,x2}^k, L_{g,y2}^k, L_{g,z2}^k] \quad (5.16)$$

である。 $[A_g^k]$ と $[B_g^k]$ は何れも 6×6 の行列であり、その行列要素³⁾は 2 次の NEM の場合とは異なるが、ノード k の断面積と各方向のノードサイズのみ依存する点は同じである。また、 $[C_g^k]$ は 7×6 の行列となるが、その要素も断面積とノードサイズのみで決定される。2 次の NEM の場合と大きく異なる点は、 \vec{Q}_g^k に高次モーメントが現れる

ことと、 \bar{L}_g^k が追加された点である。

5.3. 横方向漏洩項の2次式フィッティング

4次のNEMの場合、(5.11)式を内部反復計算に使用しようとする、ベクトル \bar{L}_g^k を与える必要がある。この中には重み付き残差法の導入により現れた1次及び2次の横方向漏洩モーメント項が含まれている。例えば x 方向に関して、

$$\begin{aligned} L_{g,xn}^k &= \frac{1}{\Delta_y^k} L_{g,y,xn}^k + \frac{1}{\Delta_z^k} L_{g,z,xn}^k \\ &= \frac{1}{\Delta_y^k} \left\{ \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{\Delta_x^k/2} w_n(x) \bar{L}_{g,y}^k(x) dx \right\} + \frac{1}{\Delta_z^k} \left\{ \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{\Delta_x^k/2} w_n(x) \bar{L}_{g,z}^k(x) dx \right\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

を得るには、ノード内の y 方向及び z 方向漏洩の x 方向分布 $\bar{L}_{g,y}^k(x)$ 、 $\bar{L}_{g,z}^k(x)$ を具体的に与える必要がある。この方法として、以下の方法がある。

- (a) 平坦近似：漏洩分布を無視してノード内で一定と見なす。
- (b) バックリング近似：漏洩分布は中性子束分布 $\bar{\phi}_g^k(x)$ に比例すると仮定する。
- (c) QTL近似：隣接2ノードの漏洩項を利用して2次式でフィッティングする。

(a)の場合には \bar{L}_g^k の要素は全てゼロとなる。(b)は初期のノード法で使用された方法であるが、特に各方向の漏洩が変数分離できないような場合に大きな誤差を生じる。(c)はNEM以外の手法も含め、現在の多くのノード法で採用されているものである。以下では、 $\bar{L}_{g,y}^k(x)$ を例にとって、QTL近似(Quadratic Transverse Leakage Approximation)の扱いについて説明する。

QTL近似では、 $\bar{L}_{g,y}^k(x)$ を以下のように2次式で表現する。例えば、(3.5)式で定義した $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を使用して、

$$\bar{L}_{g,y}^k(x) \approx \rho_{g,y}^k(x) \equiv \rho_{0g,y,x}^k + \rho_{1g,y,x}^k f_1(x) + \rho_{2g,y,x}^k f_2(x) \quad (5.18)$$

とする。係数 $\rho_{0g,y,x}^k$ は、(5.18)式が(2.19)式を満足しなければならないことから直ちに決められる。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{\Delta_x^k/2} \bar{L}_{g,y}^k(x) dx &= L_{g,y}^k = J_{g,y+}^k - J_{g,y-}^k = (J_{g,y+}^{out,k} - J_{g,y+}^{in,k}) - (J_{g,y-}^{in,k} + J_{g,y-}^{out,k}) \\ &\approx \frac{1}{\Delta_x^k} \int_{-\Delta_x^k/2}^{\Delta_x^k/2} \rho_{g,y}^k(x) dx = \rho_{0g,y,x}^k \end{aligned} \quad (5.19)$$

であり、 $\rho_{0g,y,x}^k$ は反復計算における部分中性子流の初期値または前回計算値により与えられる。

一方、残された係数 $\rho_{1g,y,x}^k$ 、 $\rho_{2g,y,x}^k$ を決めるため、図3に示すように k 番目ノードに隣接する2つのノードを考え、 $(-\Delta_x^k/2 \leq x \leq \Delta_x^k/2)$ の範囲で定義される(5.18)式を隣接ノードまで拡張すれば、以下の2つの条件式が使える。

$$\frac{1}{\Delta_x^{k-1}} \int_{-\Delta_x^k/2 - \Delta_x^{k-1}}^{-\Delta_x^k/2} \rho_{g,y}^k(x) dx = L_{g,y}^{k-1} \quad (5.20)$$

$$\frac{1}{\Delta_x^{k+1}} \int_{\Delta_x^k/2}^{\Delta_x^k/2 + \Delta_x^{k+1}} \rho_{g,y}^k(x) dx = L_{g,y}^{k+1} \quad (5.21)$$

これらの式に(5.18)式を代入して連立式を解けば、係数 $\rho_{1g,y,x}^k$ 、 $\rho_{2g,y,x}^k$ が求められる。

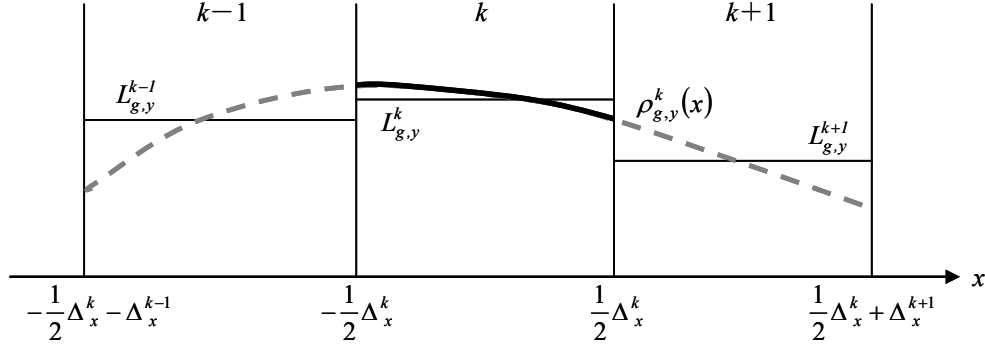


図3 横方向漏洩関数の2次式フィッティング(QTL近似)

また、(5.18)式を(5.17)式に代入すれば、(5.16)式 \bar{L}_g^k の x 方向要素が、

$$L_{g,x1}^k = \frac{1}{\Delta_y^k} L_{g,y,x1}^k + \frac{1}{\Delta_z^k} L_{g,z,x1}^k = \frac{\rho_{1g,y,x}^k}{12\Delta_y^k} + \frac{\rho_{1g,z,x}^k}{12\Delta_z^k} \quad (5.22)$$

$$L_{g,x2}^k = \frac{1}{\Delta_y^k} L_{g,y,x2}^k + \frac{1}{\Delta_z^k} L_{g,z,x2}^k = \frac{\rho_{2g,y,x}^k}{20\Delta_y^k} + \frac{\rho_{2g,z,x}^k}{20\Delta_z^k} \quad (5.23)$$

として与えられる。 y 方向と z 方向についても同様である。

6. 不連続因子の導入

6.1. 不連続因子の意味

粗メッシュを扱うノード法のほとんどは均質化断面積を使用する。例えば、1つの燃料集合体断面を1ノードに割り当てて炉心計算をする場合、あらかじめ集合体内で均質化された断面積を用意する。一般に、この均質化断面積を作成するのに、非均質な集合体の無限格子モデルを用いて2次元多群輸送計算を行い、これにより得られる非均質中性子束分布で反応率を保存するように荷重平均した均質化断面積を作成する。すなわち、

$$\Sigma_g^{homo} = \frac{\int \Sigma_g^{hetero}(\mathbf{r}) \phi_g^{hetero}(\mathbf{r}) dV}{\phi_g^{homo} V^{homo}} \quad (6.1a)$$

$$\phi_g^{homo} V^{homo} = \int \phi_g^{hetero}(\mathbf{r}) dV \quad (6.1b)$$

このようにして得られた均質化断面積を使用して炉心計算を行っても、全炉心を非均質に扱う計算と完全に一致する解は得られない。むしろ、均質化断面積作成の際に無限格子モデルで得られる中性子束で荷重平均することも1つの理由ではあるが、それだけではない。仮に全炉心計算を非均質のまま行い、これにより得られる全炉心非均質中性子束を使用して、(6.1)式により燃料集合体毎に均質化断面積を作成したとする。このようにして得られた均質化断面積を使用し、同じコードで再度全炉心計算を行っても、やはり全炉心非均質計算の結果を完全に再現することはできない²⁾。例えば、図4のような1次元問題を考える。

k 番目ノードと $k+1$ 番目ノードの内部には、非均質性(断面積が異なる微細構造)があるものとする。この非均質性を考慮して体系計算をすれば、各ノード内の非均質中性子束分布 $\tilde{\phi}_g^k(x)$ 及び $\tilde{\phi}_g^{k+1}(x)$ が得られる。同時にノード境界における正味中性子流が得られる。ここで得られた非均質中性子束を使用して、(6.1)式によりノード k 及びノード $k+1$ の均質化断

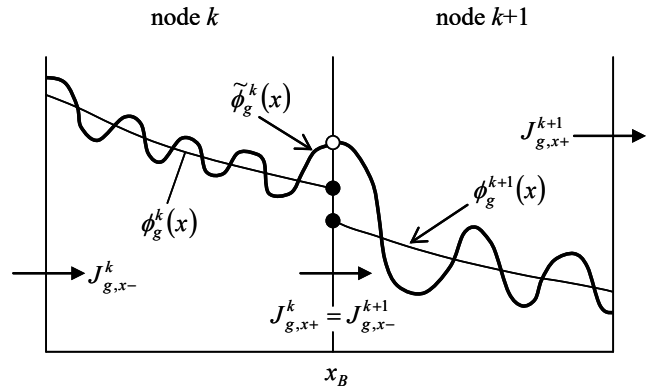


図4 非均質中性子束と均質中性子束

面積を作成して再び体系計算を行っても、非均質計算の場合と反応率と漏れを同時に保存するような結果は得られない。次に2つのノードを分離して考え、非均質計算で得られたノード境界の正味中性子流を境界条件として課し均質化断面積を使用して各ノード毎に計算すると、同図に示すような均質化中性子束の分布 $\phi_g^k(x)$ 、 $\phi_g^{k+1}(x)$ を得る。この時、非均質計算と各ノードの均質計算では反応率と漏れを保存する結果が得られるが、ノード境界 $x = x_B$ で均質化中性子束は不連続となる。逆に言えば、均質化断面積を使用する計算では、均質化媒質境界において非均質中性子束の連続性を考慮すべきであり、結果として均質化中性子束の不連続性を許容する必要がある。そこで、均質化媒質境界において不連続因子を次のように定義する。

$$f_{g,x+}^k \equiv \frac{\tilde{\phi}_g^k(x=x_B)}{\phi_g^k(x=x_B)}, \quad f_{g,x-}^{k+1} \equiv \frac{\tilde{\phi}_g^{k+1}(x=x_B)}{\phi_g^{k+1}(x=x_B)} \quad (6.2)$$

ここで、 $f_{g,x+}^k$ と $f_{g,x-}^{k+1}$ はそれぞれ k 番目ノードの右側境界と $k+1$ 番目ノードの左側境界における第 g 群の不連続因子である。境界における非均質中性子束は連続であり、

$$f_{g,x+}^k \phi_g^k(x=x_B) = f_{g,x-}^{k+1} \phi_g^{k+1}(x=x_B) = \tilde{\phi}_g^k(x=x_B) \quad (6.3)$$

一般に、3次元 X-Y-Z 体系の問題では、1つのノードが持つ6つの表面に対し、6つの不連続因子が与えられることになる。この時、(6.2)式の中性子束は表面平均中性子束を意味することになる。

(6.2)式に示されるように、不連続因子は非均質表面平均中性子束の均質化表面平均中性子束に対する比として定義される。しかし、非均質中性子束、及びこれにより得られる均質化断面積と不連続因子は、全炉心を非均質のまま解いた時にのみ正確な値として得られ、それが得られているのならば均質化定数を作成して炉心計算をする意味はない。そこで、均質化断面積と不連続因子は、燃料集合体の2次元無限格子モデルを使用した非均質計算により得られる中性子束で代用して作成することになる。集合体計算により得られる近似的な不連続因子は集合体不連続因子(ADS : Assembly Discontinuity Factor)と呼ばれ、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \text{集合体不連続因子} &= \frac{\text{着目する集合体表面における面平均非均質中性子束}}{\text{着目する集合体表面における面平均均質化中性子束}} \\ &= \frac{\text{着目する集合体表面における面平均非均質中性子束}}{\text{集合体平均中性子束}} \end{aligned} \quad (7.4)$$

不連続因子導入の経緯やその効果については、文献2において詳しく解説されているので、これ以上は述べない。以下では NEM において、具体的に不連続因子を使用する方法について述べる。

6.2. 不連続因子を用いた部分中性子流の更新

NEMに限らずほとんどの近代ノード法は、表面平均パラメータを利用するため、不連続因子の導入は容易である。不連続因子を導入しない場合には、図5(a)に示すように部分中性子流は隣接ノード間で連続であるとして扱われる。

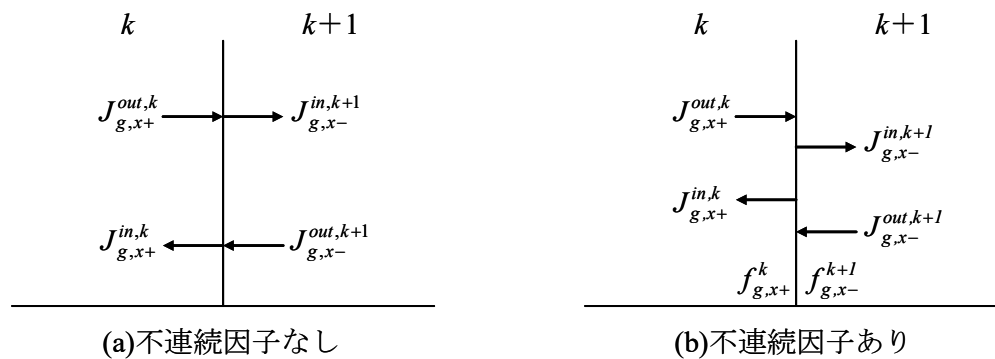


図5 不連続因子の有無による部分中性子のノード間の連続性

不連続因子を扱わない場合には、ノードkとこれに隣接するノードk+1の表面平均部分中性子流の間には以下のような関係が成立する。

$$J_{g,x-}^{in,k+1} = J_{g,x+}^{out,k} \quad (6.5a)$$

$$J_{g,x+}^{in,k} = J_{g,x-}^{out,k+1} \quad (6.5b)$$

これらの式は、(2.15)~(2.18)式から、ノード境界における表面平均中性子束と表面

平均正味中性子流の連続性を保証している。一方、不連続因子を導入する場合には、表面平均正味中性子流を連続としながらも、表面平均中性子束は不連続とし、代わりに非均質表面平均中性子束を連続にする。

$$J_{g,x+}^k = J_{g,x-}^{k+1} \quad (6.6)$$

$$f_{g,x+}^k \phi_{g,x+}^k = f_{g,x-}^{k+1} \phi_{g,x-}^{k+1} \quad (6.7)$$

これらを、表面平均部分中性子流で表し、式を整理すると

$$J_{g,x-}^{in,k+1} = (1 - \alpha_{g,x+}^k) J_{g,x+}^{out,k} - \alpha_{g,x+}^k J_{g,x+}^{in,k} \quad (6.8)$$

$$\text{ただし、} \alpha_{g,x+}^k \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{f_{g,x+}^k}{f_{g,x-}^{k+1}} \right) \quad (6.9)$$

が得られる。 $k-1$ と k 番目ノードの境界についても同様にして、

$$J_{g,x+}^{in,k-1} = (1 - \alpha_{g,x-}^k) J_{g,x-}^{out,k} - \alpha_{g,x-}^k J_{g,x-}^{in,k} \quad (6.10)$$

$$\text{ただし、} \alpha_{g,x-}^k \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{f_{g,x-}^k}{f_{g,x+}^{k-1}} \right) \quad (6.11)$$

を得る。ノード境界における不連続因子が全て 1.0(均質化表面平均中性子束=非均質表面平均中性子束)、あるいは不連続因子の比が 1.0($\alpha_{g,x\pm}^k = 0$)の場合には、表面平均部分中性子流はノード境界で連続となり、不連続因子を使用しない場合の扱いと一致する。したがって、不連続因子は近代ノード法の計算に不可欠というわけではないが、燃料物質、燃焼度、ボイド率、制御棒の有無などの違いにより、異質の燃料体が隣接するような場合、すなわち α がゼロから大きく離れるような場合には、精度向上に有効となる。

7. NEM の計算フロー

固有値問題(k_{eff} 計算)における外部反復計算の仕組みについては、近代ノード法も通常の有限差分法と本質的に変わりはない。一方、内部反復計算については、ノード法の手法やコードによって異なる。4 次の NEM の場合には、既に述べたように、内部反復計算は(5.6)式に基づいて行われる。この際、チェッカーボードスイープと呼ばれる計算技法が採られる。これは、体系中のノードを図 6 に示すように、2 色(赤と黒)のチェッカー模様に分け、先ず

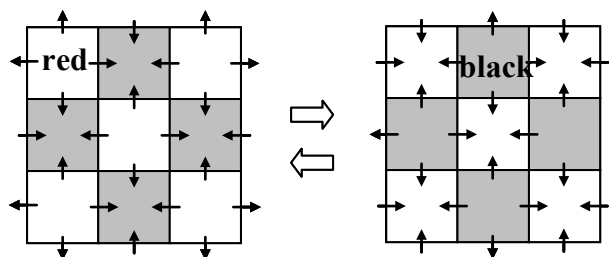


図 6 チェッカーボードスイープ

全ての赤色ノードに対し、(5.6)式により $\vec{J}_g^{out,k}$ ($k \in red$) を計算する。これを使用して隣接する黒色ノードの $\vec{J}_g^{in,k}$ ($k \in black$) を更新するが、不連続因子を適用する場合には(6.8)式及び(6.10)式を使用する。次に黒色ノードに対して同様な計算を行い、これをノード体積平均中性子束が収束するか内部反復計算の上限回に至るまで繰り返す。このようなチェッカーボードスイープを用いた計算アルゴリズムは、回帰演算を含まず、複数のノードに対するデータの演算を同時に処理することができるため、ベクトル計算機や並列計算機において威力を発揮する³⁾。NEMの外部反復を含めた計算全体の流れとしては、概ね図7のようになる。

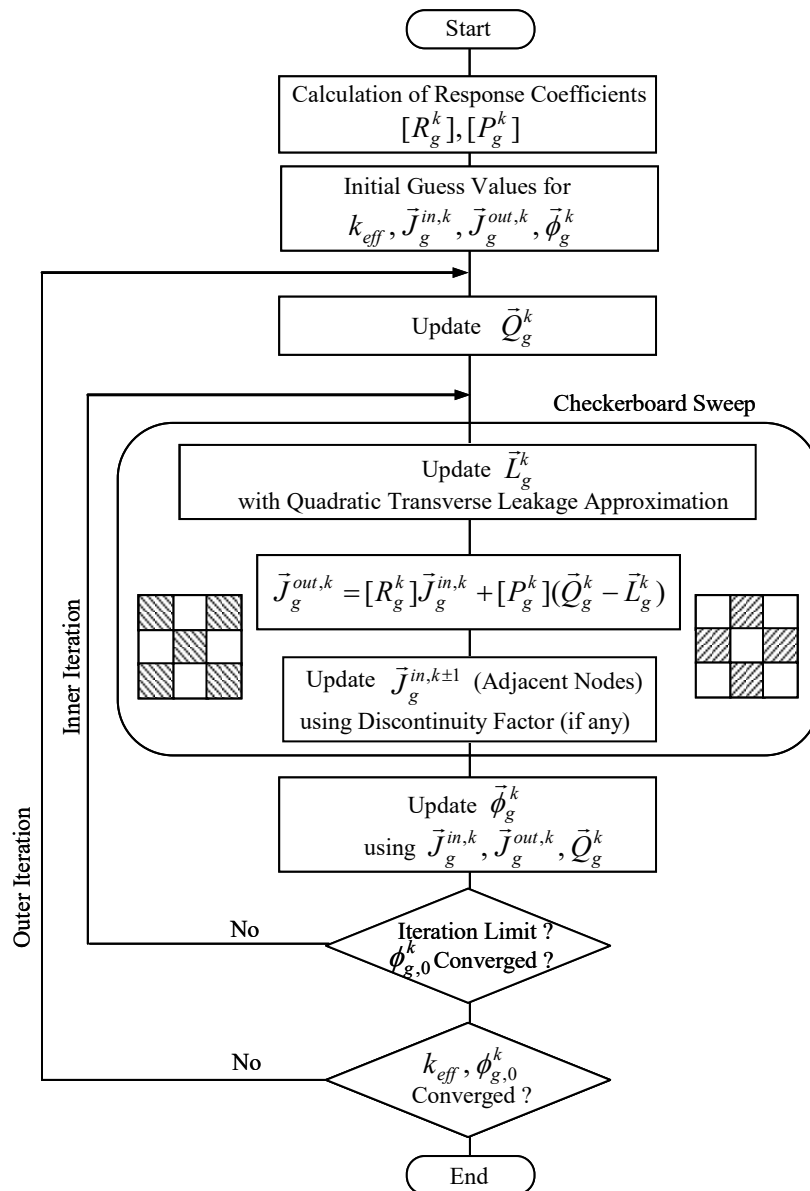


図7 NEMの計算フロー

8. 近代ノード法による計算例

8.1. MOSRA-Light コード

MOSRA-Light コード³⁾は、原研が開発した多項式展開ノード法に基づく多群拡散コードである。これは、ベクトル計算機用に開発したものであるが、プログラム全体が独立した演算の DO ループ処理の積み重ねとして構成されているため、DO 分割処理により容易に並列計算機に移植することができる。適用範囲は X-Y-Z 体系に対する固有値問題の他、固定源問題、随伴問題であり、境界条件として、真空、反射、アルベド、周期、90 度回転、対角対称、ゼロ表面中性子束、内部黒体を利用できる。本テキストでは、境界条件の扱いは省略したが、MOSRA-Light のマニュアル³⁾にはこれらの境界条件の扱いについても詳細に記述してある。多群断面積は標準入力を与える他、SRAC コード⁹⁾が出力するデータを利用できる。また、付属のユーティリティコードを利用して、1 点炉動特性パラメータの計算、1 次摂動または厳密摂動計算、反応率編集なども可能である。

8.2. ベンチマーク計算

近代ノード法の効用を示す計算例として、IAEA の 3 次元ベンチマーク問題¹⁰⁾を採り上げ、MOSRA-Light(4 次の NEM)と有限差分拡散コードである CITATION¹¹⁾による計算結果を比較する。

計算体系を図 8 に示す。PWR を模擬した炉心は 2 種類の燃料タイプで構成され、内側燃料領域には 5 箇所制御棒が挿入されている。そのうち 1 領域は炉心上部から

80cm の所に制御棒先端が位置する部分挿入状態である。このため出力分布に対するメッシュ効果が比較的大きくなる特徴があり、この問題は拡散コードの検証に広く利用されている。エネルギー群数は 2 群であり、断面積値と参照解はベンチマークブック¹⁰⁾に与えられている。参照解は有限差分法コード VENTURE¹²⁾を使用してメッシュ分割を 5 通りに変えた計算結果からメッシュ幅ゼロの点に外挿して得られたものである。

メッシュ幅を 20cm 及び 10cm とした場合の MOSRA-Light による計算結果を図 9 に示す。中性子増倍率の計算精度については、参照解との差異は何れの場合も $0.006\% \delta k$ 以下でありメッシュ効果はほぼ無視することができる。集合体平均出力分布の差異については、メッシュ幅が 20cm の場合において平均で 0.6%、最大でも 1.3%程度と小さい。メッシュ幅 10cm 以下では、集合体平均出力分布の最大誤差は約 0.5%以下と更に小さくなる。ベクトル計算機 FACOM/VP2600(1988 年モデルの古いものである)による計算時間(対角対称オプションは使用せず)は、メッシュ幅が 20cm の場合で 2 秒、

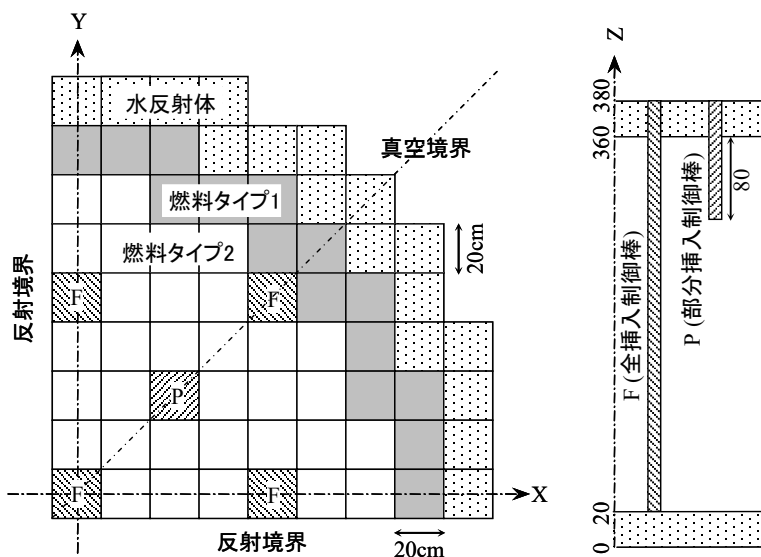


図 8 IAEA3 次元ベンチマーク問題体系

10cm の場合でも 14 秒であった。

有限差分法に基づくスカラコード CITATION による同問題に対するメッシュ幅依存性を MOSRA-Light の結果と比較して図 10 に示す。同図(左)より、CITATION により MOSRA-Light (20cm メッシュ) と同等の計算精度を得るためには、メッシュ幅を 2cm 未満にする必要があり、同じ計算機を使用して 2855 秒以上の計算時間が必要になる。この計算例からも、近代ノード

Upper : Reference solution with VENTURE Keff=1.02903		F		0.597		-1.30		0.51											
				0.476		0.700		0.611		-1.02									
				-0.73		-0.37		-0.15		0.32									
Middle : %Error with MOSRA-Light ($\Delta=20\text{cm}$) Keff=1.02897		F		1.178		0.972		0.923		0.866									
				0.39		0.33		-0.40		-0.94									
				-0.16		-0.13		0.03		0.22									
Lower : %Error with MOSRA-Light ($\Delta=10\text{cm}$) Keff=1.02909		P		1.368		1.311		1.181		1.089		1.000		0.711					
				0.46		0.53		0.30		-0.16		-0.79		-1.29					
				-0.26		-0.24		-0.16		0.06		0.03		0.26					
Control rod positions		F		1.397		1.432		1.291		1.072		1.055		0.976		0.757			
				0.47		0.50		0.39		0.35		-0.09		-0.72		-1.24			
				-0.32		-0.34		-0.29		-0.22		-0.09		-0.03		0.16			
F		F		0.729		1.281		1.422		1.193		0.610		0.953		0.959		0.777	
				0.80		0.52		0.43		0.54		0.18		0.16		-0.5		-0.99	
				-0.26		-0.31		-0.29		-0.22		-0.07		-0.05		0.07		0.13	

図 9 参照解との固有値と集合体出力分布の比較

法が 14cm~21cm 程度のサイズの燃料集合体を扱う軽水炉体系において、いかに有効であるか良く分かる。一方、図 10(右)において、計算時間のメッシュ幅依存性を見ると、同じメッシュ幅であれば、CITATION の計算時間は、MOSRA-Light のベクトル計算(複数データの一括処理を行う)と同等であり、同じ計算機で MOSRA-Light のスカラモード(ベクトル処理無し)による計算をさせると、むしろ CITATION より計算時間は長くなる。これは、収束加速法などの違いもあるが、既に述べたように、近代ノード法はノード内の分布を考慮するための余分な処理を伴うためである。

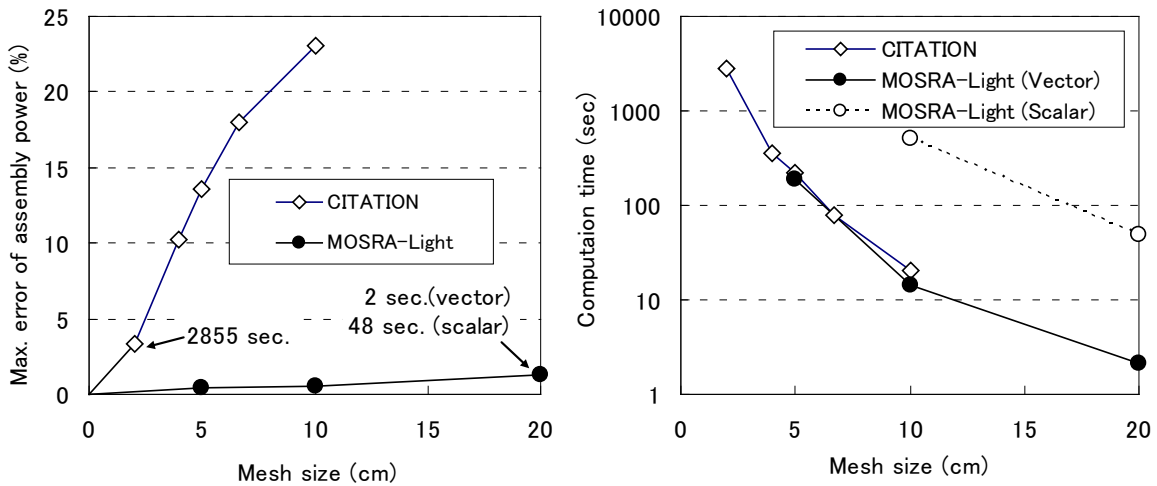


図 10 集合体出力の最大誤差のメッシュ幅依存性(左)と計算時間(右)

したがって、中性子の平均自由行程が長い体系、物質境界などにより粗メッシュが適用できない体系、ピン単位のデータを必要とする臨界実験の解析などにおいて、詳細メッシュ分割で近代ノード法を適用すると、かえって不要な計算コストがかかることになる。このため、MOSRA-Light では 2 次の NEM もオプションにより利用できるようにしている。図 10(右)に示すように、ノード法もノード総数が増えれば計算コスト増は免れないため、実機を扱うコードでは、燃料集合体断面をあくまで 1 ノードとして扱って十分な精度が出るようにさまざまな工夫が行われている¹³⁾。

9. おわりに

今回のセミナーの趣旨が「基礎から学ぶ炉心解析」であることから、本テキストでは、「近代ノード法？名前は知っている！」などと言われる方を対象に、ノード法がどのようなものか具体的なイメージが得られることを狙って内容を記述した。このため、ピンパワー再構成法、非線形反復法、輸送ノード法、六角ノード法、空間依存動特性解析への適用などの項目については全て省略することとした。ノード法の実機軽水炉での利用状況や最新のノード法の動向の概要については、文献13や14などに見ることができる。ノード法を学ぶ次のステップとして、これらを参考にすると良いであろう。

参考文献

- 1) R. D. Lawrence, "Progress in Nodal Methods for the Solution of the Neutron Diffusion and Transport Equations," *Prog. Nucl. Energy*, **17**, [3], 271 (1986).
- 2) K. S. Smith, "Assembly Homogenization Techniques for Light Water Reactor Analysis," *Prog. Nucl. Energy*, **17**, [3], 303 (1986).
- 3) 奥村啓介, "MOSRA-Light; ベクトル計算機のための高速 3 次元中性子拡散ノード法コード," JAERI-Data/Code 98-025, 日本原子力研究所, (1998).
- 4) J. Koyama, M. Aoyama, "Nodal Expansion Method for Solution of Diffusion Equation in Hexagonal Geometry," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **26**, 636 (1989).
- 5) N. Ito, T. Takeda, "Three-Dimensional Multigroup Diffusion Code ANDEX Based on Nodal Method for Cartesian Geometry," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **27**, 350 (1990).
- 6) T. Iwamoto, M. Yamamoto, "Advanced Nodal Methods of the Few-Group BWR Core Simulator NEREUS," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **36**, 996 (1999).
- 7) R. D. Lawrence, J. J. Dorning, "A Nodal Green's Function Method for Multidimensional Neutron Diffusion Calculations," *Nucl. Sci. Eng.* **76**, 218 (1980).
- 8) J.Y. Cho, C. H. Kim, "Higher Order Polynomial Expansion Nodal Method for Hexagonal Core Neutronics Analysis," *An. Nucl. Energy*, **17**, 271 (1986).
- 9) 奥村啓介, 金子邦男, 土橋敬一郎, "SRAC95; 汎用核計算コードシステム," JAERI-Data/Code 96-015, 日本原子力研究所, (1996).
- 10) Argonne Code Center, "Benchmark Problem Book (11.multi-dimensional (x-y-z) LWR model)," ANL-7416, Suppl. 2, Argonne National Laboratory, (1977).
- 11) T. B. Fowler, D. R. Vondy, G. W. Cunningham, "Nuclear Reactor Analysis Code; CITATION," ORNL-TM-2496, Oak Ridge National Laboratory, (1969).
- 12) D. R. Vondy, T. B. Fowler, G. W. Cunningham, "VENTURE: A Code Block for Solving Multigroup Neutronics Problems Applying the Finite-Difference Diffusion-Theory Approximation to Neutron Transport Version III," ORNL-5062/R1, Oak Ridge National Laboratory, (1977).
- 13) 佐治悦郎, 岩本達也, 丸山博見, 田原義寿, 森正明, "商業用軽水炉核計算手法の高度化," 日本原子力学会誌, **36**, 484, (1994).
- 14) 「原子炉炉心計算手法の高度化」研究専門委員会, "原子炉炉心計算法の高度化の現状と展望," 日本原子力学会 (2001).