核分裂連鎖反応で形成される中性子束の振幅と随伴中性子束

電力中央研究所　名内 泰志

1 緒言

核燃料物質内の中性子輸送で興味深い性質の一つに、「ある条件下で中性子束[1]分布が基本モードに漸近する」ということがある。こうした条件では中性子束分布がある固有値方程式の固有関数となっている。そして数学的にはその方程式に随伴式があり、その固有関数である随伴中性子束なる物理量が定義される。それらの中で、定常方程式の随伴中性子束は感度解析などに利用されている。

筆者は連続エネルギーモンテカルロ法（MC 法）でこれらの随伴中性子束を計算する方法を研究している[1, 2, 3]。MC 法の一般的な中性子束の計算は、中性子と原子核の衝突でおこる反応の種類、反応の結果生じる中性子のエネルギーの範囲が限定され、各々のおこる確率が決定されていることを前提としている。一方、例えば、散乱された中性子がどのような入射中性子によってもたらされたかを遡る逆問題については、エネルギーの範囲が無限大までとりえることなどがあり、候補となる反応やエネルギーをとる確率をあらかじめ定めることが難しい。積分型輸送方程式とその随伴式を対比すると、随伴中性子束の評価に、この「遡る計算」が必要と見えるところがあり、このため 2009 年まで MC 法では随伴中性子束が計算できないとされてきた。これに対し筆者は、Hurwitz や Ussachoff による、定常方程式の随伴中性子束が臨界炉心に配置した中性子源に対する”Core Power の漸近値”に比例するとした論文[4,5]に行き当たり、その比例関係が反応度の符号によらず成り立つための理論を明確にし、計算アルゴリズムを構築し、MCNP コードなどで計算した[1]。α固有値方程式の随伴中性子束については Bell & Glasstone[6]が文献[5]と類似の検討をおこなっていたが、これを MCNP コードで実際に計算した。さらに遅発中性子の影響もとりこんで Natural Mode 式=ω固有値方程式の随伴中性子束の物理的性質をあきらかにし、MC 法での計算を可能としてきた[2]。さらに最近、γ固有値方程式についての理論をとりまとめ[3]、よく使われる固有値方程式が出そろった。

炉物理部会編集小委員会ご担当から第 54 回原子力学会賞論文賞対象の論文[2]の事項を書くこと依頼されたが、第 44 回原子力学会賞論文賞対象の論文[1]のことを「炉物理の研究」で紹介していなかったことと、せっかく論文[3]もまとめたところなので、本稿では論文[1, 2, 3]の随伴中性子束に関する検討箇所に絞って、それらの比較を紹介したい。

以降、類似した数式の導出が並ぶ。数式の苦手な方や時間のない方は表 4-1 を眺めていただければ、筆者の意図するところをご理解いただくのに十分と思われる。

[1] 本稿では中性子束は angular neutron flux とする

2 固有値方程式

時間 t に依存する、位置 $\mathbf{r}$, エネルギーE、飛行方向$\boldsymbol{\Omega}$の中性子束$\Psi(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)$に関する微積分型中性子輸送方程式は以下になる[7]。巨視的全断面積Σ_t, 巨視的散乱断面積Σ_sは位置毎に組成に応じて定まるが、煩雑なので $\mathbf{r}$ の関数とは表記していない。

$$\begin{aligned}\frac{1}{V}\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)}{\partial t} &= -\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Psi - \Sigma_t\Psi + \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\Sigma_s(E_{in}\to E,\boldsymbol{\Omega}_{in}\to\boldsymbol{\Omega})\Psi(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in}) \\ &\quad + S_f(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t) + S_{ext}(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\end{aligned} \tag{1}$$

式中の添字 in は incident、つまりその項が核反応を引き起こす中性子のものであることを指す。V は中性子の速さ、S_fは核分裂源、S_{ext}は外部中性子源の発生強度である。S_fは遅発中性子の扱いでかわる。ここから、定常方程式、α固有値方程式、ω固有値方程式、γ固有値方程式を導く。よく御承知おきの読者は、図 2-1、2-2 あたりを一瞥して 2-5 節に進んでほしい。

2-1 定常方程式

本節は定常方程式について書く。ここはよく知られているので、式(7)以降の行だけ読んでほしい。時間に依存しない中性子束をϕ_sとして、この定常方程式の成り立つ系の S_fは

$$S_{f,s} = \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\chi_t(E,\boldsymbol{\Omega})\nu_t(E_{in})\Sigma_f\phi_s(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in}) \tag{2}$$

となる。Σ_fは巨視的核分裂断面積、 ν_tは核分裂あたりの中性子発生数で、即発中性子発生数ν_pと、群 j 毎の遅発中性子発生数ν_{dj}の和である。

$$\nu_t = \nu_p + \sum_j \nu_{dj} \tag{3}$$

χ_tは核分裂中性子発生スペクトルで、即発中性子と遅発中性子の関係は以下になる。

$$\chi_t\nu_t = \chi_p\nu_p + \sum_j \chi_{dj}\nu_{dj} \tag{4}$$

χについては放出エネルギーと飛行方向で積分して 1 になるよう規格化して表記している

$$\int dE\int d\boldsymbol{\Omega}\chi_{t\ \mathrm{or}\ p\ \mathrm{or}\ dj} = 1 \tag{5}$$

式(1)と式(2) にϕ_s^{mode}を代入して、式(2)を式(1)に代入し、外部中性子源 S_{ext}=0 の条件で、中性子束が時間に対して増加も減少もしないように左辺の微分項をゼロとし、各項が釣り合うように固有値 k^{mode}で核分裂中性子生成源を除したものが定常方程式となる。

$$\begin{aligned}0 &= -\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi_s^{mode} - \Sigma_t\phi_s^{mode} + \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\Sigma_s(E_{in}\to E,\boldsymbol{\Omega}_{in}\to\boldsymbol{\Omega})\phi_s^{mode}(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in}) \\ &\quad + \frac{1}{k^{mode}}\int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\chi_t(E,\boldsymbol{\Omega})\nu_t(E_{in})\Sigma_f\phi_s^{mode}(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in})\end{aligned} \tag{6}$$

式(6)を満たす固有値 k^{mode}に対し中性子束ϕ_s^{mode}は固有関数で、k^{mode}とϕ_s^{mode}の組合わせは無数にあるのだが、k^{mode}の最大値を実効増倍率 k_{eff}という。これに相当する中性子束分布ϕ_s^{mode}は基本モードのそれ、すなわちϕ_sとなる。

$$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\phi_s+\Sigma_t\phi_s-\int dE_{in}\int d\mathbf{\Omega}_{in}\Sigma_s(E_{in}\to E,\mathbf{\Omega}_{in}\to\mathbf{\Omega})\phi_s(E_{in},\mathbf{\Omega}_{in}) \\ =\frac{1}{k_{eff}}\int dE_{in}\int d\mathbf{\Omega}_{in}\chi_t(E,\mathbf{\Omega})\nu_t(E_{in})\Sigma_f\phi_s(E_{in},\mathbf{\Omega}_{in}) \tag{7}$$

左辺第 1,2,3 項は中性子の漏洩、衝突、散乱源であり、左辺を方向、エネルギー、位置で積分すれば、中性子の消失数となる。右辺の積分は全核分裂中性子発生数である。Duderstadt & Hamilton は、k_{eff} 自体は核分裂中性子が次世代に生み出す核分裂中性子数の期待値、として説明しつつ、式(7)の導出で「世代」についてあまり強い関心を払っていない[7]。臨界状態では中性子束の分布は振幅も時間に対しても世代に対しても定常なのだが、物理現象として、核分裂連鎖反応における世代は厳然と存在する。世代毎に中性子束分布をとると、十分な世代を経ていれば第 m+1 世代と第 m 世代の中性子束分布$\phi_s^{(m+1)}$と$\phi_s^{(m)}$は基本モードに相似で、かつ振幅の期待値の比が、臨界であれば k_{eff}=1 で一定となっている。式(7)は基本モードに中性子束が収束して以降の全ての世代の中性子束に対して成り立つ式となる。式(7)のϕ_s を基本モードに十分漸近しているという第 m 世代の中性子束$\phi_s^{(m)}$で置き換えると、左辺は第 m 世代の中性子の消滅を表す式となり、右辺の積分部分は$\phi_s^{(m)}$により核分裂生成する第 m+1 世代の核分裂中性子発生数となる。その積分値を世代間中性子発生数比である k_{eff} で除する、という行為は、ちょうど右辺が第 m 世代の核分裂中性子発生数を示すことに等しい。したがって定常方程式は、その基本モードに形状が収束した後の任意の世代における、核分裂中性子の発生と中性子の消失のバランスを示す式である、ともいえる。この式(7)は臨界以外の状況でも成り立つ式で、中性子束の振幅が世代毎に変化しながら分布は変わらないという状況で、ある世代での中性子の生成量と消滅量のバランスを示している。ただし、未臨界であれば外部源がないと連鎖反応の継続が難しいこと、超臨界ではやがて熱的フィードバックがかかることから、式(7)を満たす中性子束を臨界以外の場で観測することは容易ではない。

2-2 α固有値方程式

即発臨界未満の体系に炉心に時間的にδ関数状に中性子を撃ち込み、その後、遅発中性子先行核の崩壊が顕著になるまでの時間範囲に着目すると、炉心出力が時間に対して減少し、やがて単一の指数関数に沿って減少する。中性子源の投入直後、あるいは反応度の投入直後は、中性子束は高次モードの形状関数ϕ_α^{mode}と固有値α^{mode}の積の重ね合わせとなる。

$$\Psi(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega},t)=\sum_{mode}\phi_\alpha^{mode}e^{\alpha^{mode}t} \tag{8}$$

$\phi_{\alpha,mode}\, e^{\alpha mode\, t}$の中で基本モード$\phi_\alpha\, e^{\alpha t}$だけが他のモードに比べて減衰が遅いため、やがてこの成分が支配的になる。式(1)の S_f の遅発中性子源と外部中性子源 S_{ext} を零にして、この時間依存中性子束を代入し、$e^{\alpha t}$ で除すると

$$\frac{\alpha}{V}\phi_\alpha = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi_\alpha - \Sigma_t\phi_\alpha + \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\Sigma_s(E_{in}\to E,\boldsymbol{\Omega}_{in}\to\boldsymbol{\Omega})\phi_\alpha(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in}) + \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\chi_p(E,\boldsymbol{\Omega})\nu_p(E_{in})\Sigma_f\phi_\alpha(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in}) \tag{9}$$

という、所謂α固有値方程式が導出される[6]。論文や教科書によっては、測定できる中性子束の時間変化割合が基本的に負値のため、αを正値・中性子束の時間変化を$\phi_\alpha e^{-\alpha t}$として表現し、式(9)左辺に負号がつく場合がある。またいくつかの論文ではα固有値方程式という用語を後述の natural mode 式に使っている例があり、そうした場合式(9)のαをα_pで書くことがある。αは高次モードの影響は出るものの、実効増倍率と異なり、体系が未臨界から遅発臨界程度まで実測出来る量である。αの測定にはパルス中性子法や炉雑音法等が利用される。

2-3 Natural Mode Equation あるいはω固有値方程式

外部中性子源がなく、遅発中性子の発生が有意な時間領域での中性子輸送を考える際は、α固有値方程式で無視していた遅発中性子の生成項をS_fに加える。

$$S_{f,nat} = \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\chi_p(E,\boldsymbol{\Omega})\nu_p(E_{in})\Sigma_f\Psi(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t) + \sum_j \chi_{dj}\lambda_j C_j \tag{10}$$

C は遅発中性子先行核密度、λは先行核崩壊定数となる。式(1)は

$$\frac{1}{V}\frac{\partial\Psi(E,\boldsymbol{\Omega},t)}{\partial t} = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Psi - \Sigma_t\Psi + \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\Sigma_s(E_{in}\to E,\boldsymbol{\Omega}_{in}\to\boldsymbol{\Omega})\Psi(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in},t) + \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\chi_p(E,\boldsymbol{\Omega})\nu_p(E_{in})\Sigma_f\Psi(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in},t) + \sum_j \chi_{dj}\lambda_j C_j \tag{11}$$

となる。一方先行核の密度に関する式は以下となる。

$$\frac{dC_j}{dt} = \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\nu_{dj}(E_{in})\Sigma_f\Psi(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in},t) - \lambda_j C_j \tag{12}$$

Natural Mode 式は中性子束と遅発中性子先行核濃度の振幅が時間に対して同じ指数関数で変化する「漸近条件」に現れる固有値方程式であり、その際の中性子束分布ϕ_w及び先行核濃度分布c_jが時間に対して不変となる。

$$\Psi(E,\boldsymbol{\Omega},t) \to \phi_\omega e^{\omega t} \tag{13}$$

$$C_j(t) \to c_j e^{\omega t} \tag{14}$$

式(13)、(14)を式(11)、 (12)に代入し$e^{\omega t}$で除すると、

$$\frac{\omega}{V}\phi_\omega = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi_\omega - \Sigma_t\phi_\omega + \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\Sigma_s(E_{in}\to E,\boldsymbol{\Omega}_{in}\to\boldsymbol{\Omega})\phi_\omega(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in}) + \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\chi_p(E,\boldsymbol{\Omega})\nu_p(E_{in})\Sigma_f\phi_\omega(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in}) + \sum_j \chi_{dj}\lambda_j c_j \tag{15}$$

と

$$\omega c_j = \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\nu_{dj}(E_{in})\Sigma_f\phi_\omega(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in}) - \lambda_j c_j \tag{16}$$

が得られる。

式(16)からc_jの式を作って式(15)に代入すると

$$\frac{\omega}{V}\phi_\omega = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi_\omega - \Sigma_t\phi_\omega + \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\Sigma_s(E_{in}\to E,\boldsymbol{\Omega}_{in}\to\boldsymbol{\Omega})\phi_\omega(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in}) + \int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\chi_p(E,\boldsymbol{\Omega})\nu_p(E_{in})\Sigma_f\phi_\omega(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in}) + \sum_j \frac{\lambda_j}{\omega+\lambda_j}\int dE_{in}\int d\boldsymbol{\Omega}_{in}\chi_{dj}\nu_{dj}(E_{in})\Sigma_f\phi_\omega(E_{in},\boldsymbol{\Omega}_{in}) \tag{17}$$

これが Natural Mode Equation あるいはω固有値方程式と呼ばれる[8]。このωは炉周期の逆数であり、反応度が投入された後の出力の時間に対する指数関数状の変化から得ることができる。

2-1~2-3 節の方程式の評価するところの違いを明示するため、図 2-1 を用意した。数字は世代を表し、折点は中性子の衝突点、分岐は核分裂、横破線は遅発中性子先行核を指す。世代と時間は混同されがちなのだが、例えば世代 3 の中性子の生成にかかわる連鎖反応に遅発中性子が現れるかどうかで時間的には相当「散在」することがイメージできるかと思う。2-1 節の定常方程式では時間的な散らばりは関係なく、③の数と②の数の比、④の数の③の数に対する比で世代毎中性子発生率比を計算する。一方 2-2 節のα固有値方程式は遅発中性子が出る前の状況を示す式なので、ソースをおいてから間もない時間領域で、中性子の世代には関係なく、時間に対する中性子束の変化を扱う。また 2-3 節のω固有値方程式では、遅発中性子発生が平衡状態、つまり相当時間が進んだ状況で、中性子の世代には関係なく、時間に対する中性子束の変化を扱う。

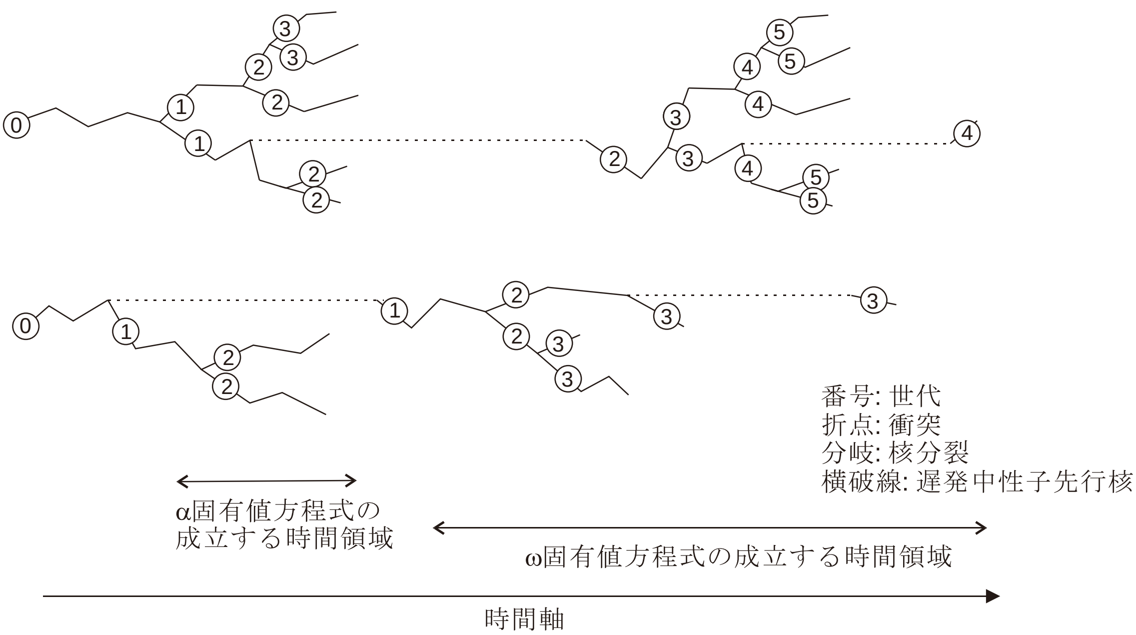

図 2-1 核分裂連鎖反応での世代と時間の模式図

2-4 γ固有値方程式

従前の PWR 燃料集合体は軸方向の形状と組成が概ね一様で、無限増倍率が大きいながら、

水平方向の中性子漏洩率を大きくとるようにすることで、燃料が 1 体で保管されている際の未臨界性を担保している。鉛直方向[2]に一様で水平方向のバックリングが物質バックリングよりも大きい未臨界体系において、ある高さ(位置 $\mathbf{r}_0$ の z 成分)に中性子源を配置すると、位置 $\mathbf{r}_0$ から高さ方向に十分に離れると中性子束が鉛直方向に単一の指数関数的に従って減衰することが知られる。図 2-2 に模式図を示す。この条件での水平方向中性子束分布が固有値方程式であらわされる。

まず便宜的に時間的に変動しない外部中性子源を配置するとして、中性子の輸送方程式を簡略化していくと、時間定常なので式(1)の左辺の時間微分が 0 となり、核分裂源項は定常方程式の式(2)と同形状となる。ただし k_{eff} での除算は行わない。

$$\begin{aligned}0 = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Psi - \Sigma_t\Psi + \int \mathrm{dE_{in}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{in}}\Sigma_s(\mathrm{E_{in}}\to\mathrm{E}, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{in}}\to\boldsymbol{\Omega})\Psi(\mathrm{E_{in}}, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{in}}) \\ + \int \mathrm{dE_{in}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{in}}\chi_t(\mathrm{E}, \boldsymbol{\Omega})\nu_t(\mathrm{E_{in}})\Sigma_f\Psi(\mathrm{E_{in}}, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{in}}) + S_{ext}(\mathrm{E}, \boldsymbol{\Omega})\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\end{aligned} \tag{18}$$

位置 $\mathbf{r}_0$ から離れた位置では、外部中性子源強度が 0 となる。高さ方向に十分に離れると中性子束が鉛直方向に単一の指数関数的に従って減衰することを以下で表現する。

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathrm{E}, \boldsymbol{\Omega}) \to \phi_\gamma(x, y)e^{-\gamma z} \tag{19}$$

式(18)に式(19)を代入して $e^{-\gamma z}$ で除すると以下が得られる。

$$\begin{aligned}0 = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\left\{\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\phi_\gamma}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial\phi_\gamma}{\partial y}\right)\right\} + \gamma\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{e}_z\phi_\gamma - \Sigma_t\phi_\gamma \\ + \int \mathrm{dE_{in}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{in}}\Sigma_s(\mathrm{E_{in}}\to\mathrm{E}, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{in}}\to\boldsymbol{\Omega})\phi_\gamma \\ + \int \mathrm{dE_{in}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{in}}\chi_t(\mathrm{E}, \boldsymbol{\Omega})\nu_t(\mathrm{E_{in}})\Sigma_f\phi_\gamma\end{aligned} \tag{20}$$

少し整理した式、

$$\begin{aligned}\gamma\Omega_z\phi_\gamma = \boldsymbol{\Omega}\cdot\left\{\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\phi_\gamma}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial\phi_\gamma}{\partial y}\right)\right\} + \Sigma_t\phi_\gamma - \int \mathrm{dE_{in}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{in}}\Sigma_s(\mathrm{E_{in}}\to\mathrm{E}, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{in}}\to\boldsymbol{\Omega})\phi_\gamma \\ - \int \mathrm{dE_{in}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{in}}\chi_t(\mathrm{E}, \boldsymbol{\Omega})\nu_t(\mathrm{E_{in}})\Sigma_f\phi_\gamma\end{aligned} \tag{21}$$

がγ固有値方程式と呼ばれる[9]。γ値を測定する実験は指数実験とよばれる[10]。

[2] 本稿では便宜的に鉛直方向を z 方向とし、中性子束は中性子源より上方のみを考慮する

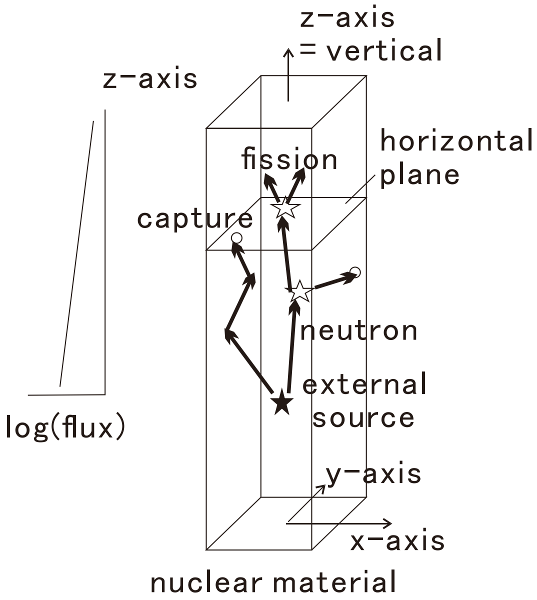

図 2-2 指数実験条件の模式図

2-1~2- 4 節で 4 種類の固有値方程式を示した。少し煩雑なので、ここでは消滅演算子を使って式を簡略にして少し見通しをよくする。関数 f に対して以下の演算子を用意する。

$$\mathrm{Lf} = \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\nabla}\mathrm{f} + \Sigma_{\mathrm{t}}\mathrm{f} - \int \mathrm{dE_{in}} \int \mathrm{d}\mathbf{\Omega}_{\mathrm{in}}\Sigma_{\mathrm{s}}(\mathrm{E_{in}} \to \mathrm{E}, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{in}} \to \mathbf{\Omega})\mathrm{f}(\mathrm{E_{in}}, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{in}}) \tag{22}$$

$$\mathrm{L}_{xy}\mathrm{f} = \mathbf{\Omega}\cdot\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}\right) + \Sigma_{\mathrm{t}}\mathrm{f} - \int \mathrm{dE_{in}} \int \mathrm{d}\mathbf{\Omega}_{\mathrm{in}}\Sigma_{\mathrm{s}}(\mathrm{E_{in}} \to \mathrm{E}, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{in}} \to \mathbf{\Omega})\mathrm{f}(\mathrm{E_{in}}, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{in}}) \tag{23}$$

$$\mathrm{F_p f} = \int \mathrm{dE_{in}} \int \mathrm{d}\mathbf{\Omega}_{\mathrm{in}}\chi_{\mathrm{p}}(\mathrm{E}, \mathbf{\Omega})\nu_{\mathrm{p}}(\mathrm{E_{in}})\Sigma_{\mathrm{f}}\mathrm{f}(\mathrm{E_{in}}, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{in}}) \tag{24}$$

$$\mathrm{F_{dj} f} = \int \mathrm{dE_{in}} \int \mathrm{d}\mathbf{\Omega}_{\mathrm{in}}\chi_{\mathrm{dj}}\nu_{\mathrm{dj}}(\mathrm{E_{in}})\Sigma_{\mathrm{f}}\mathrm{f}(\mathrm{E_{in}}, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{in}}) \tag{25}$$

$$\mathrm{Ff} = \mathrm{F_p f} + \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{F_{dj} f} \tag{26}$$

これらをつかうと各固有値方程式が以下であらわされる。
定常方程式

$$0 = -\mathrm{L}\phi_{\mathrm{s}} + \frac{1}{\mathrm{k_{eff}}}\mathrm{F}\phi_{\mathrm{s}} \tag{27}$$

α固有値方程式

$$\frac{\alpha}{V}\phi_\alpha = -L\phi_\alpha + F_p\phi_\alpha \tag{28}$$

Natural mode 式あるいはω固有値方程式

$$\frac{\omega}{V}\phi_\omega = -L\phi_\omega + F_p\phi_\omega + \sum_j \frac{\lambda_j}{\omega+\lambda_j}F_{dj}\phi_\omega \tag{29}$$

γ固有値方程式

$$\gamma\Omega_z\phi_\gamma = L_{xy}\phi_\gamma - F\phi_\gamma \tag{30}$$

となる。4 つの方程式をそれぞれ満たす 4 種の中性子束は当然異なった形状となる。一方で、式(27)は核分裂中性子発生数と中性子消失数を外部源なしで釣り合わせたもので、式(28)や(29)は核分裂中性子発生数が中性子消失数を超過すれば時定数が正、つまり中性子束の振幅が時間的に増加することを意味し、また式(30)はある高さでの水平面上で核分裂中性子数より消失数が多い分を鉛直方向の中性子流で補償する式となっている。要はどれも中性子数のバランスを示している式である。

2-5 随伴方程式

式(27)~(30)の固有値方程式には共役な式が存在し、それを満たす随伴式が知られる。一般に演算子 A と関数 f に対する随伴演算子 $A^\dagger$ と随伴関数 $f^\dagger$ は以下の関係を満たすものとされる。

$$\langle f^\dagger A f\rangle = \langle f A^\dagger f^\dagger\rangle \tag{31}$$

かぎ括弧はエネルギー、飛行方向、空間全体での積分値となる。

式(22), (23)に現れるΣ_tは自己随伴演算子である。

続いて散乱演算子や式(24)(25)等の核分裂演算子について考える。以下添え字の out は反応で発生する中性子に関するものを表す。

$$\int d\mathbf{r}^3 \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} f^\dagger(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \int dE_{in} \int d\mathbf{\Omega}_{in} \Sigma_s(E_{in} \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_{in} \to \mathbf{\Omega}_{out}) f(E_{in}, \mathbf{\Omega}_{in}) \tag{32}$$

で積分の順番を入れ替えれば

$$\int d\mathbf{r}^3 \int dE_{in} \int d\mathbf{\Omega}_{in} f(E_{in}, \mathbf{\Omega}_{in}) \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \Sigma_s(E_{in} \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_{in} \to \mathbf{\Omega}_{out}) f^\dagger(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \tag{33}$$

となる。すなわち、Σ_s と $f^\dagger$ の積を、反応で発生する中性子のエネルギー、飛行方向で積分する、という演算子が随伴演算子となる。

次に、輸送項に現れる$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla$について述べる。スカラー関数 f とその随伴関数 $f^\dagger$ の積に$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla$を作用させる。

$$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla f f^\dagger = f\mathbf{\Omega}\cdot\nabla f^\dagger + f^\dagger\mathbf{\Omega}\cdot\nabla f \tag{34}$$

移項する。

$$f^\dagger\mathbf{\Omega}\cdot\nabla f = -f\mathbf{\Omega}\cdot\nabla f^\dagger + \mathbf{\Omega}\cdot\nabla f f^\dagger \tag{35}$$

全体をエネルギー、飛行方向、位置で積分する。

$$\langle f^\dagger\mathbf{\Omega}\cdot\nabla f\rangle = -\langle f\mathbf{\Omega}\cdot\nabla f^\dagger\rangle + \langle\mathbf{\Omega}\cdot\nabla f f^\dagger\rangle \tag{36}$$

ここで右辺第 2 項でガウスの発散定理を利用。

$$\langle \mathrm{f}^{\dagger}\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\mathrm{f}\rangle = -\langle \mathrm{f}\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\mathrm{f}^{\dagger}\rangle + \int \mathrm{dE}\int \mathrm{d}\mathbf{\Omega}\,\mathbf{\Omega}\cdot\int \mathrm{ff}^{\dagger}\mathbf{n}\mathrm{ds} \tag{37}$$

ここで右辺第 2 項の dS は体系の外表面上のある微小面積で、**n** はその法線ベクトルである。f に中性子束、$\mathrm{f}^{\dagger}$に随伴中性子束をあてる場合を考える。計算境界の外からの中性子流入はゼロである。

$$\mathrm{f} = 0 \text{ on dS, if } \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n} < 0 \tag{38}$$

となる。一方、その外表面から外に抜けていく中性子はその後原子炉に何も影響を与えることはないため、外向きの中性子にとっての随伴中性子束はゼロとなる。

$$\mathrm{f}^{\dagger} = 0 \text{ on dS, if } \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n} > 0 \tag{39}$$

となる。したがって、f に中性子束、$\mathrm{f}^{\dagger}$に随伴中性子束をあてる場合、式(37)の第 2 項がゼロとなり

$$\langle \mathrm{f}^{\dagger}\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\mathrm{f}\rangle = -\langle \mathrm{f}\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\mathrm{f}^{\dagger}\rangle \tag{40}$$

となる。随伴演算子の性質から、$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla$の随伴演算子は$-\mathbf{\Omega}\cdot\nabla$となる[11]。

これらを使って随伴演算子の定義は以下となる。

$$\mathrm{L}^{\dagger}\mathrm{f}^{\dagger} = -\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\mathrm{f}^{\dagger} + \Sigma_{\mathrm{t}}\mathrm{f}^{\dagger} - \int \mathrm{dE_{out}}\int \mathrm{d}\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}}\Sigma_{\mathrm{s}}(\mathrm{E}\to\mathrm{E_{out}},\mathbf{\Omega}\to\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}})\mathrm{f}^{\dagger}(\mathrm{E_{out}},\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}}) \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^{\dagger}_{\mathrm{xy}}\mathrm{f}^{\dagger} = -\mathbf{\Omega}\cdot\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\mathrm{f}^{\dagger}}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial\mathrm{f}^{\dagger}}{\partial y}\right) + \Sigma_{\mathrm{t}}\mathrm{f}^{\dagger}\\ - \int \mathrm{dE_{out}}\int \mathrm{d}\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}}\Sigma_{\mathrm{s}}(\mathrm{E}\to\mathrm{E_{out}},\mathbf{\Omega}\to\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}})\mathrm{f}^{\dagger}(\mathrm{E_{out}},\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}})\end{aligned} \tag{42}$$

$$\mathrm{F}^{\dagger}_{\mathrm{p}}\mathrm{f}^{\dagger} = \int \mathrm{dE_{out}}\int \mathrm{d}\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}}\chi_{\mathrm{p}}(\mathrm{E}_{out},\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}})\nu_{\mathrm{p}}\Sigma_{\mathrm{f}}\mathrm{f}^{\dagger}(\mathrm{E_{out}},\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}}) \tag{43}$$

$$\mathrm{F}^{\dagger}_{\mathrm{dj}}\mathrm{f}^{\dagger} = \int \mathrm{dE_{out}}\int \mathrm{d}\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}}\chi_{\mathrm{dj}}(\mathrm{E}_{out},\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}})\nu_{\mathrm{dj}}\Sigma_{\mathrm{f}}\mathrm{f}^{\dagger}(\mathrm{E_{out}},\mathbf{\Omega}_{\mathrm{out}}) \tag{44}$$

$$\mathrm{F}^{\dagger}\mathrm{f}^{\dagger} = \mathrm{F}^{\dagger}_{\mathrm{p}}\mathrm{f}^{\dagger} + \sum_{\mathrm{j}}\mathrm{F}^{\dagger}_{\mathrm{dj}}\mathrm{f}^{\dagger} \tag{45}$$

これらを使って書き下すと、以下の随伴式が得られる。

定常方程式の随伴式

$$0 = -\mathrm{L}^{\dagger}\phi_s^{\dagger} + \frac{1}{\mathrm{k_{eff}}}\mathrm{F}^{\dagger}\phi_s^{\dagger} \tag{46}$$

α固有値方程式の随伴式

$$\frac{\alpha}{\mathrm{V}}\phi_{\alpha}^{\dagger} = -\mathrm{L}^{\dagger}\phi_{\alpha}^{\dagger} + \mathrm{F}^{\dagger}_{\mathrm{p}}\phi_{\alpha}^{\dagger} \tag{47}$$

Natural mode 式あるいはω固有値方程式の随伴式

$$\frac{\omega}{V}\phi_\omega^\dagger = -L^\dagger\phi_\omega^\dagger + F_p^\dagger\phi_\omega^\dagger + \sum_j \frac{\lambda_j}{\omega+\lambda_j}F_{dj}^\dagger\phi_\omega^\dagger \tag{48}$$

γ固有値方程式の随伴式

$$\gamma\Omega_z\phi_\gamma^\dagger = L_{xy}^\dagger\phi_\gamma^\dagger - F^\dagger\phi_\gamma^\dagger \tag{49}$$

3. 中性子連鎖反応の順序に沿った重要度関数のバランス式

本章では核分裂連鎖反応の経過に沿った重要度関数の振幅について述べる。2 章では各固有値方程式の固有関数の振幅は任意の正値であったが、説明のしやすさから、基本モードについては積分値を 1 に規格化する。

$$\langle\phi_s\rangle = 1 \tag{50}$$

$$\langle\phi_\alpha\rangle = 1 \tag{51}$$

$$\langle\phi_\omega\rangle = 1 \tag{52}$$

$$\langle\phi_\gamma\rangle_{xy} = \int dx\int dy\int dE\int d\mathbf{\Omega}\phi_\gamma = 1 \tag{53}$$

以降、式が並び、煩雑であるが、以降の下線①②③を考慮して式(58)(67)(84)(97)が立式され、式(65)(73)(94)(105)が同様の手順で導出されている。

3.1 十分な世代経過後の中性子束の振幅

核物質の体系があり、中性子が未だ一つも飛んでいないものとする。ここで位置 $\mathbf{r}_0$ にエネルギーE_0、飛行方向$\mathbf{\Omega}_0$ の中性子を配置する。中性子核分裂連鎖反応を核分裂から核分裂までの世代で区切ることとし、最初の核分裂までの中性子の飛行を第 0 世代とし、以降核分裂で世代が進むたびに世代数を 1 加えていく。第 n 世代の中性子数の第 n-1 世代に対する中性子発生化数比を $k_{(r0E0\Omega0),n}$ とする。世代間中性子発生率比は初期の中性子源位置に依存する。しかし、連鎖反応が繰り返され、この n の数が大きくなると、$k_{(r0E0\Omega0),n}$ は k_{eff} に収束する。

$$k_{(\mathbf{r}0,E0,\mathbf{\Omega}0),n} \to k_{eff} \tag{54}$$

その際の中性子束の分布はϕ_s に相似となる。

$$\Psi(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega},t) \to I_{FP}(\mathbf{r}_0,E_0,\mathbf{\Omega}_0)\phi_s(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega}) \tag{55}$$

右辺の($\mathbf{r}$,E,$\mathbf{\Omega}$)は中性子束を評価している位相空間座標で、($\mathbf{r}_0$,E_0,$\mathbf{\Omega}_0$)は中性子源を配置している位相空間座標である。興味深い点として、中性子源をどこに配置しているかによらず、十分な世代後の子孫の中性子束分布は同じ形状になる。一方で、振幅 I_{FP} は中性子源の位置に依存する。また、ここで中性子源としたが、外部源、核分裂源、散乱源だけでなく、飛行中の中性子すべてに I_{FP} は定義できる。この点を考慮し図 3- 1 のように位置 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0 d\xi$に

動く中性子の飛跡に着目して I_{FP} のバランス式を作る。

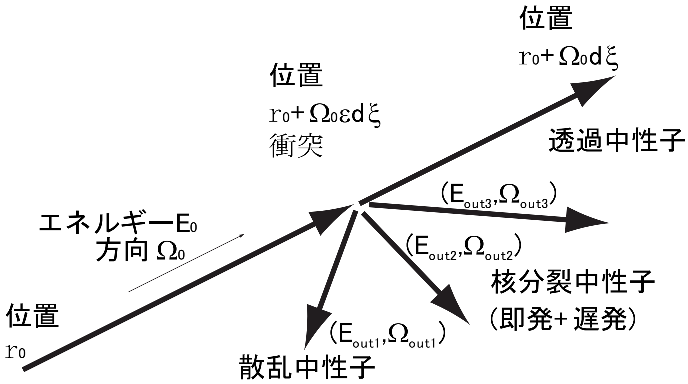

図 3-1 I_{FP}、I_α、I_Ωのバランスを検討する中性子の飛跡

I_{FP} を便宜的に式(54-55)条件の成り立つある世代(仮にNとする)の振幅とする。ここでは、源にある中性子にとっての I_{FP} は、この飛跡を通過した中性子、あるいは飛跡上での反応で生じる中性子（散乱による方向・エネルギー変換も含む）にとっての I_{FP} の和と等しいという関係を数式化する。

中性子が微小距離 dξの飛跡を通過する確率は $e^{-\Sigma t d\xi} \fallingdotseq 1- \Sigma_t d\xi$となる。この飛跡上で中性子が散乱しエネルギー$E_{out}$, 飛行方向 $\mathbf{\Omega}_{out}$ に中性子を生じる確率は微小距離であるという条件を考慮すると

$$\Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out})d\xi \tag{56}$$

この飛跡上で中性子が核分裂をおこしエネルギーE_{out}、方向 Ω_{out} に中性子を生じる確率は

$$\chi_t(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})\nu_t(E_0)\Sigma_f(E_0)d\xi \tag{57}$$

それぞれ位置での I_{FP} を考慮し、バランス式を作ると

$$\begin{aligned} I_{FP}(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) = {} & (1 - \Sigma_t d\xi) I_{FP}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\ & + \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out}) d\xi I(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \\ & + \frac{1}{k_{eff}} \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \chi_t(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_t(E_0) \Sigma_f(E_0) d\xi I(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \end{aligned} \tag{58}$$

ここでεは

$$0 \le \varepsilon \le 1 \tag{59}$$

であり、飛跡の上で反応がおきていることを指す。ここで式(58)の k_{eff} について説明が必要となる。I_{FP} という量を、便宜的に第 N 世代後の中性子束の振幅とする。①左辺は($\mathbf{r}_0$,E_0,$\mathbf{\Omega}_0$)におかれた中性子にとっての第 N 世代後の中性子束の振幅で、右辺第 1 項は透過中性子にとっての第 N 世代後の中性子束、右辺第 2 項は散乱中性子束にとっての第 N 世代後の中性子束の振幅である。第 3 項については核分裂で世代が一つ進む。式(57)に I_{FP} を乗じただけでは、第 N+1 世代の中性子束の振幅を示すこととなる。「十分な世代」以降は振幅が世代毎に k_{eff} 倍となる。このため、k_{eff} で除すことで第 N 世代の中性子束の振幅が得られる。すなわ

ち、核分裂源に含まれる $1/k_{eff}$ は第 N 世代後の中性子束の振幅のバランス式を作成するために必要となる。

続いて、式(58)の左辺をさしひく。

$$
\begin{aligned}
0 = &\left(I_{FP}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) - I_{FP}(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0)\right) - d\xi\Sigma_t I_{FP}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
&+ \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out}) d\xi I(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \frac{1}{k_{eff}} \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \chi_t(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_t(E_0) \Sigma_f(E_0) d\xi I(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})
\end{aligned}
\tag{60}
$$

右辺第 1 項は Tayler 展開で以下になる。

$$
I_{FP}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) = I_{FP}(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) + d\xi \frac{\partial I_{FP}(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0)}{\partial \xi}
\tag{61}
$$

右辺第 2 項の偏微分は、$\mathbf{\Omega}_0$ 方向に変分をとることに相当する。これは方向ベクトル $\mathbf{\Omega}_0$ とナブラ演算子の内積をとることで表現でき、

$$
I_{FP}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) = I_{FP}(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) + d\xi \mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\nabla} I_{FP}(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0)
\tag{62}
$$

となる。これを式(60)に代入する

$$
\begin{aligned}
0 = &\, d\xi \mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\nabla} I_{FP}(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) - d\xi\Sigma_t I_{FP}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
&+ \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out}) d\xi I(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \frac{1}{k_{eff}} \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \chi_t(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_t(E_0) \Sigma_f(E_0) d\xi I(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})
\end{aligned}
\tag{63}
$$

続いて全体を $d\xi$ で除す。

$$
\begin{aligned}
0 = &\, \mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\nabla} I_{FP}(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) - \Sigma_t I_{FP}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
&+ \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out}) I(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \frac{1}{k_{eff}} \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \chi_t(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_t(E_0) \Sigma_f(E_0) I(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})
\end{aligned}
\tag{64}
$$

さらに $d\xi \to 0$ をとる。

$$
\begin{aligned}
0 = &\, \mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\nabla} I_{FP}(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) - \Sigma_t I_{FP}(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
&+ \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out}) I(\mathbf{r}_0, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \frac{1}{k_{eff}} \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \chi_t(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_t(E_0) \Sigma_f(E_0) I(\mathbf{r}_0, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})
\end{aligned}
\tag{65}
$$

式(46)と式(65)は、I_{FP} が $\phi_s^\dagger$ が同一であれば同じ式となる。従って I_{FP} が正で意味のある解をもつならば、I_{FP} が定常方程式にとっての随伴中性子束に比例することとなる。

この式の導出は Ussachoff によって 1956 年になされている[4]。しかしながら、Ussachoff の論文では前記下線部①で述べた、核分裂項を k_{eff} で除した理由がかかれておらず、Importance を無限大時間後の Core Power としている[4]。図の 2-1 から類推されるように、「十分な時間後」と「十分な世代後」では意味合いが異なる。しかし Ussachoff や Hurwitz はその違いを認識していなかった、もしくは意味合いが実効的に同等となる臨界条件の随伴中性子束にしか興味がなかったのだろうと思う。筆者はこの k_{eff} の役割を明確にするととも

に、連続エネルギーモンテカルロ法での随伴中性子束の計算法を明確にしている[1]。

なお、本稿では I_{FP} について「中性子束の振幅」として説明したが、基本モードの中性子束に比例する物理量であれば何でも I_{FP} に比例する。MCNP コードでは現状、基本モードの中性子束によって誘導される核分裂による中性子発生数を体系全体で積分したものを I_{FP} に相当する物理量として評価している模様である。

3.2 遅発中性子発生の影響がない時間範囲で十分な時間経過後の中性子束の振幅

本節も中性子が未だ一つも飛んでいない核物質の体系で、時刻 0 に位置 $\mathbf{r}_0$ にエネルギー E_0、飛行方向 $\mathbf{\Omega}_0$ の中性子を配置する。遅発中性子の発生が無視できる時間領域では、時間が十分に経過すると中性子束分布が時間の経過に対して一定の ϕ_α に漸近し、その際の中性子束の変化が $e^{\alpha t}$ に従うようになる。ϕ_a に式(51)で規格化をかけてしまっているので振幅を別に I_α ととる。ここでは I_α を、中性子源を $(\mathbf{r}_0,E_0,\mathbf{\Omega}_0)$ に配置してから十分な時間を経過した後のある時刻 T 以降で、中性子束が以下の式を満たす場合の振幅とする。

$$\Psi(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega},t) \to I_\alpha(\mathbf{r}_0,E_0,\mathbf{\Omega}_0)\phi_\alpha(\mathbf{r},E,\mathbf{\Omega})e^{\alpha(t-T)} \tag{66}$$

3.1 節と同様の議論となるが、中性子源をどこに配置しているかによらず、十分な時間経過後の中性子束分布形状は同一になる。ここで $(\mathbf{r}_0,E_0,\mathbf{\Omega}_0)$ に中性子を配置してから前記ある時刻 T で形成される中性子束について、その振幅に関するバランス式を作成する。3.1 節同様、図 3-1 でいうところの $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0 d\xi$ にかけた飛跡での透過と衝突事象に着目する。3.1 節と異なる点は、②<u>透過中性子や散乱中性子は $(\mathbf{r}_0,E_0,\mathbf{\Omega}_0)$ におかれた中性子に比べ発生時点に時間遅れが生じている点である。例えば $\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0\varepsilon d\xi$ で衝突が起きるなら、その時刻は $(\mathbf{r}_0,E_0,\mathbf{\Omega}_0)$ に中性子を配置した時刻に比べ $\varepsilon d\xi/V$ だけの時間遅れを生じる。時刻 T での中性子束の振幅に関するバランス式を作るなら、この時間遅れを補正する必要がある。この時刻では中性子束の振幅は $e^{\alpha t}$ で変化していくので、バランス式の導出では $e^{-\alpha\cdot\text{遅れ時間}}$ を乗じて補正すればよい。</u>これを念頭に、遅発中性子発生を無視してバランス式をつくると以下となる。

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mathbf{r}_0,E_0,\mathbf{\Omega}_0) &= e^{-\frac{\alpha}{V}d\xi}(1-\Sigma_t d\xi)I_\alpha(\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0 d\xi,E_0,\mathbf{\Omega}_0) \\ &\quad + e^{-\frac{\alpha}{V}\varepsilon d\xi}\int dE_{out}\int d\mathbf{\Omega}_{out}\{\Sigma_s(E_0\to E_{out},\mathbf{\Omega}_0\to\mathbf{\Omega}_{out}) \\ &\quad + \chi_p(E_{out},\mathbf{\Omega}_{out})\nu_p(E_0)\Sigma_f(E_0)\}d\xi I_\alpha(\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0\varepsilon d\xi,E_{out},\mathbf{\Omega}_{out}) \end{aligned} \tag{67}$$

右辺第 1 項目を Tayler 展開し一次の項をとる。

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mathbf{r}_0,E_0,\mathbf{\Omega}_0) &= \left(1-\frac{\alpha}{V}d\xi\right)(1-\Sigma_t d\xi)I_\alpha(\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0 d\xi,E_0,\mathbf{\Omega}_0) \\ &\quad + e^{-\frac{\alpha}{V}\varepsilon d\xi}\int dE_{out}\int d\mathbf{\Omega}_{out}\{\Sigma_s(E_0\to E_{out},\mathbf{\Omega}_0\to\mathbf{\Omega}_{out}) \\ &\quad + \chi_p(E_{out},\mathbf{\Omega}_{out})\nu_p(E_0)\Sigma_f(E_0)\}d\xi I_\alpha(\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0\varepsilon d\xi,E_{out},\mathbf{\Omega}_{out}) \end{aligned} \tag{68}$$

左辺を差し引く。この際、右辺第一項を展開した際の 2 次の微小項は無視する。

$$
\begin{aligned}
0 = \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 d\xi, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) - \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) - \left(\Sigma_t + \frac{\alpha}{V}\right) d\xi \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 d\xi, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
+ e^{-\frac{\alpha}{V}\varepsilon d\xi} \int d\mathrm{E}_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(\mathrm{E}_0 \to \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_0 \to \boldsymbol{\Omega}_{out}) \\
+ \chi_p(\mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \nu_p(\mathrm{E}_0) \Sigma_f(\mathrm{E}_0)\} d\xi \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})
\end{aligned} \tag{69}
$$

右辺第 1 項を Tayler 展開する。$\boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \nabla$の使い方は 3.1 節と同じである。

$$
\begin{aligned}
0 = \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) + d\xi \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \nabla \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) - \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) - \left(\Sigma_t + \frac{\alpha}{V}\right) d\xi \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 d\xi, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
+ e^{-\frac{\alpha}{V}\varepsilon d\xi} \int d\mathrm{E}_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(\mathrm{E}_0 \to \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_0 \to \boldsymbol{\Omega}_{out}) \\
+ \chi_p(\mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \nu_p(\mathrm{E}_0) \Sigma_f(\mathrm{E}_0)\} d\xi \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})
\end{aligned} \tag{70}
$$

全体を dξで除する。

$$
\begin{aligned}
0 = \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \nabla \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) - \left(\Sigma_t + \frac{\alpha}{V}\right) \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 d\xi, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
+ e^{-\frac{\alpha}{V}\varepsilon d\xi} \int d\mathrm{E}_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(\mathrm{E}_0 \to \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_0 \to \boldsymbol{\Omega}_{out}) \\
+ \chi_p(\mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \nu_p(\mathrm{E}_0) \Sigma_f(\mathrm{E}_0)\} \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})
\end{aligned} \tag{71}
$$

さらに dξ→0 をとる。

$$
\begin{aligned}
0 = \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \nabla \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) - \left(\Sigma_t + \frac{\alpha}{V}\right) \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
+ \int d\mathrm{E}_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(\mathrm{E}_0 \to \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_0 \to \boldsymbol{\Omega}_{out}) \\
+ \chi_p(\mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \nu_p(\mathrm{E}_0) \Sigma_f(\mathrm{E}_0)\} \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})
\end{aligned} \tag{72}
$$

少し整理して

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha}{V} \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) = \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \nabla \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) - \Sigma_t \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
+ \int d\mathrm{E}_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \Sigma_s(\mathrm{E}_0 \to \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_0 \to \boldsymbol{\Omega}_{out}) \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \\
+ \int d\mathrm{E}_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \chi_p(\mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \nu_p(\mathrm{E}_0) \Sigma_f(\mathrm{E}_0) \mathrm{I}_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})
\end{aligned} \tag{73}
$$

この式は式(47)と一致する。従ってα固有値方程式の随伴式を満たす随伴中性子束ϕ_αは、評価点に中性子源をおいた際に十分な時間経過後に形成される中性子束の振幅に比例する[2]。この式の導出は Bell & Glasstone によってなされているが[6]、上記下線部②の「時間遅れを指数関数で補正する」という考え方は入っておらず、時間依存の importance 関数 A($\mathbf{r}$,E,$\boldsymbol{\Omega}$,t)の距離 VΔt での変分をあっさり

$$
\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\mathrm{A}(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 V\Delta t, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t + \Delta t) - \mathrm{A}(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t)}{V\Delta t} \right] = \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \nabla \mathrm{A} + \frac{\partial \mathrm{A}}{V\, \partial t} \tag{74}
$$

と書いている。

3.3 遅発中性子の発生が有意な時間領域で十分な時間経過後の中性子束の振幅

本節では、時刻ゼロで中性子が一つもない炉心の位置 $\mathbf{r}_0$ にエネルギーE_0、飛行方向$\boldsymbol{\Omega}_0$ の

中性子源を配置した後、遅発中性子発生が所謂平衡条件に漸近する程度の時間 T_ωを経過した後、中性子束が

$$\Psi(\mathbf{r},\mathrm{E},\mathbf{\Omega},\mathrm{t}) \to \mathrm{I}_\omega(\mathbf{r}_0,\mathrm{E}_0,\mathbf{\Omega}_0)\phi_\omega(\mathbf{r},\mathrm{E},\mathbf{\Omega})e^{\omega(t-T_\omega)} \tag{75}$$

という漸近条件となる際の、中性子束の振幅 I_ωに関するバランス式を作成する。このバランス式の導出は、透過中性子、散乱中性子、核分裂即発中性子に関しては 3.2 節と同様なので遅発中性子について詳説する。$\mathbf{r}_0$ と $\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0\,d\xi$の間の微小距離 $d\xi$での核分裂発生確率は

$$\Sigma_f(E_0)d\xi \tag{76}$$

であり、j 群の遅発中性子先行核の発生確率は

$$\nu_{dj}(E_0)\Sigma_f(E_0)d\xi \tag{77}$$

j 群の遅発中性子が時刻τから$\tau+d\tau$に発生する確率は、先行核発生時点$\varepsilon d\xi/V$ からτまでの間での先行核密度の減衰と崩壊定数を考慮して

$$d\tau\lambda_j e^{-\lambda_j\left(\tau-\frac{\varepsilon d\xi}{V}\right)}\nu_{dj}(E_0)\Sigma_f(E_0)d\xi \tag{78}$$

時刻τから$\tau+d\tau$に発生に発生する j 群の遅発中性子の飛行方向がΩ_{out} でエネルギーが E_{out} となる確率は

$$d\tau\lambda_j e^{-\lambda_j\left(\tau-\frac{\varepsilon d\xi}{V}\right)}\chi_{dj}(E_{out},\mathbf{\Omega}_{out})\nu_{dj}(E_0)\Sigma_f(E_0)d\xi \tag{79}$$

③<u>この遅発中性子発生に起因して生じる中性子にとってある時間 T_ωにつくる中性子束の振幅の期待値は、遅発中性子の発生時点がτで、ゼロ秒に比べてτ秒遅れていることを補正して</u>

$$d\tau\lambda_j e^{-\lambda_j\left(\tau-\frac{\varepsilon d\xi}{V}\right)}\chi_{dj}(E_{out},\mathbf{\Omega}_{out})\nu_{dj}(E_0)\Sigma_f(E_0)d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0\varepsilon d\xi,E_{out},\mathbf{\Omega}_{out})e^{-\omega\tau} \tag{80}$$

指数関数の項をまとめる。

$$d\tau\lambda_j e^{\lambda_j\frac{\varepsilon d\xi}{V}}e^{-(\omega+\lambda_j)\tau}\chi_{dj}(E_{out},\mathbf{\Omega}_{out})\nu_{dj}(E_0)\Sigma_f(E_0)d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0\varepsilon d\xi,E_{out},\mathbf{\Omega}_{out}) \tag{81}$$

遅発中性子の発生事象を時間的に積分する。先行核は発生時点$\varepsilon d\xi/V$ から T_ωまでとする[3]

$$\sum_j\int_{\frac{\varepsilon d\xi}{V}}^{T_\omega}d\tau\lambda_j e^{\lambda_j\frac{\varepsilon d\xi}{V}}e^{-(\omega+\lambda_j)\tau}\int dE_{out}\int d\,\mathbf{\Omega}_{out}\{\chi_{dj}(E_{out},\mathbf{\Omega}_{out})\nu_{dj}(E_0)\Sigma_f(E_0)d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0\varepsilon d\xi,E_{out},\mathbf{\Omega}_{out})\} \tag{82}$$

煩雑なのでτの積分だけここですませておく。

$$\sum_j e^{\lambda_j\frac{\varepsilon d\xi}{V}}\frac{\lambda_j}{\omega+\lambda_j}\left(e^{-(\omega+\lambda_j)\frac{\varepsilon d\xi}{V}}-e^{-(\omega+\lambda_j)T_\omega}\right)\int dE_{out}\int d\,\mathbf{\Omega}_{out}\{\chi_{dj}(E_{out},\mathbf{\Omega}_{out})\nu_{dj}(E_0)\Sigma_f(E_0)d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0\varepsilon d\xi,E_{out},\mathbf{\Omega}_{out})\} \tag{83}$$

遅発中性子も含めた I_ωのバランス式は以下となる。

[3] 本来は遅発中性子が生じてから $T\omega$まで十分な時間をとる必要があるが、実質的には $1/\min\{\lambda_j\}$の数倍の時間を過ぎれば遅発中性子発生がゼロとなり、十分な時間はとれる。

$$
\begin{aligned}
I_\omega(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) = e^{-\frac{\omega d\xi}{V}}&(1 - \Sigma_t d\xi) I_\omega(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
&+ e^{-\frac{\omega\varepsilon d\xi}{V}} \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \chi_p(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_p(E_0) \Sigma_f(E_0)\} d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \sum_j e^{\lambda_j \frac{\varepsilon d\xi}{V}} \frac{\lambda_j}{\omega + \lambda_j} \Big(e^{-(\omega+\lambda_j)\varepsilon\frac{\varepsilon d\xi}{V}} \\
&- e^{-(\omega+\lambda_j)T_\omega} \Big) \int dE_{out} \int d\,\mathbf{\Omega}_{out} \{\chi_{dj}(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_{dj}(E_0) \Sigma_f(E_0) d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0 \\
&+ \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})\}
\end{aligned}
\tag{84}
$$

右辺第 1 項の指数関数を Tayler 展開して第 1 項までとる。

$$
\begin{aligned}
I_\omega(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) = \Big(1 - \Big(&\Sigma_t + \frac{\omega}{V}\Big) d\xi\Big) I_\omega(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
&+ e^{-\frac{\omega\varepsilon d\xi}{V}} \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \chi_p(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_p(E_0) \Sigma_f(E_0)\} d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \sum_j e^{\lambda_j \frac{\varepsilon d\xi}{V}} \frac{\lambda_j}{\omega + \lambda_j} \Big(e^{-(\omega+\lambda_j)\frac{\varepsilon d\xi}{V}} \\
&- e^{-(\omega+\lambda_j)T_\omega} \Big) \int dE_{out} \int d\,\mathbf{\Omega}_{out} \{\chi_{dj}(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_{dj}(E_0) \Sigma_f(E_0) d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0 \\
&+ \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})\}
\end{aligned}
\tag{85}
$$

左辺を差し引く

$$
\begin{aligned}
0 = I_\omega(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) - I_\omega(\mathbf{r}_0, E_0,& \mathbf{\Omega}_0) - \Big(\Sigma_t + \frac{\omega}{V}\Big) d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
&+ e^{-\frac{\omega\varepsilon d\xi}{V}} \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \chi_p(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_p(E_0) \Sigma_f(E_0)\} d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \sum_j e^{\lambda_j \frac{\varepsilon d\xi}{V}} \frac{\lambda_j}{\omega + \lambda_j} \Big(e^{-(\omega+\lambda_j)\frac{\varepsilon d\xi}{V}} \\
&- e^{-(\omega+\lambda_j)T_\omega} \Big) \int dE_{out} \int d\,\mathbf{\Omega}_{out} \{\chi_{dj}(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_{dj}(E_0) \Sigma_f(E_0) d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0 \\
&+ \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})\}
\end{aligned}
\tag{86}
$$

右辺第 1 項を 1 次まで Tayler 展開して第 2 項をさしひく。

$$
\begin{aligned}
0 = d\xi \mathbf{\Omega}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} I_\omega(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) - \Big(&\Sigma_t + \frac{\omega}{V}\Big) d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 d\xi, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
&+ e^{-\frac{\omega\varepsilon d\xi}{V}} \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \chi_p(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_p(E_0) \Sigma_f(E_0)\} d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \\
&+ \sum_j e^{\lambda_j \frac{\varepsilon d\xi}{V}} \frac{\lambda_j}{\omega + \lambda_j} \Big(e^{-(\omega+\lambda_j)\frac{\varepsilon d\xi}{V}} \\
&- e^{-(\omega+\lambda_j)T_\omega} \Big) \int dE_{out} \int d\,\mathbf{\Omega}_{out} \{\chi_{dj}(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_{dj}(E_0) \Sigma_f(E_0) d\xi I_\omega(\mathbf{r}_0 \\
&+ \mathbf{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})\}
\end{aligned}
\tag{87}
$$

全体を dξで除す。

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathrm{I}_\omega(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) - \left(\Sigma_t + \frac{\omega}{V}\right) \mathrm{I}_\omega(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 d\xi, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + e^{-\frac{\omega \varepsilon d\xi}{V}} \int d\mathrm{E}_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(\mathrm{E}_0 \to \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_0 \to \boldsymbol{\Omega}_{out}) \\
& + \chi_p(\mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \nu_p(\mathrm{E}_0) \Sigma_f(\mathrm{E}_0)\} \mathrm{I}_\omega(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \\
& + \sum_j e^{\lambda_j \frac{\varepsilon d\xi}{V}} \frac{\lambda_j}{\omega + \lambda_j} \left(e^{-(\omega+\lambda_j)\frac{\varepsilon d\xi}{V}} \right. \\
& \left. - e^{-(\omega+\lambda_j) T_\omega}\right) \int d\mathrm{E}_{out} \int d\,\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\chi_{dj}(\mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \nu_{dj}(\mathrm{E}_0) \Sigma_f(\mathrm{E}_0) \mathrm{I}_\omega(\mathbf{r}_0 \\
& + \boldsymbol{\Omega}_0 \varepsilon d\xi, \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})\}
\end{aligned}
\tag{88}
$$

さらに dξ→0 をとる。

$$
\begin{aligned}
& 0 \\
& = \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} I_\omega(\boldsymbol{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) - \left(\Sigma_t + \frac{\omega}{V}\right) I_\omega(\boldsymbol{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + \int dE_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_0 \to \boldsymbol{\Omega}_{out}) + \chi_p(E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \nu_p(E_0) \Sigma_f(E_0)\} I_\omega(\boldsymbol{r}_0, E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \\
& + \sum_j \frac{\lambda_j}{\omega + \lambda_j} \left(1 \right. \\
& \left. - e^{-(\omega+\lambda_j) T_\omega}\right) \int dE_{out} \int d\,\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\chi_{dj}(E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \nu_{dj}(E_0) \Sigma_f(E_0) I_\omega(\boldsymbol{r}_0, E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})\}
\end{aligned}
\tag{89}
$$

対比のために変形する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega}{V} \mathrm{I}_\omega(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) = {} & \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathrm{I}_\omega(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) - \Sigma_t \mathrm{I}_\omega(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + \int d\mathrm{E}_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(\mathrm{E}_0 \to \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_0 \to \boldsymbol{\Omega}_{out}) \mathrm{I}_\omega(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})\} \\
& + \int d\mathrm{E}_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\chi_p(\mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \nu_p(\mathrm{E}_0) \Sigma_f(\mathrm{E}_0) \mathrm{I}_\omega(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})\} \\
& + \sum_j \frac{\lambda_j}{\omega + \lambda_j} \left(1 \right. \\
& \left. - e^{-(\omega+\lambda_j) T_\omega}\right) \int d\mathrm{E}_{out} \int d\,\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\chi_{dj}(\mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out}) \nu_{dj}(\mathrm{E}_0) \Sigma_f(\mathrm{E}_0) \mathrm{I}_\omega(\mathbf{r}_0, \mathrm{E}_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})\}
\end{aligned}
\tag{90}
$$

ここで遅発中性子先行核の性質を考慮する。遅発中性子を含む炉心の中性子束の相対時間変化率と、遅発中性子先行核の減衰定数には以下の関係があることが知られる[7]。

$$
-\min\{\lambda_j\} < \omega \tag{91}
$$

この関係から

$$
\omega + \lambda_j > 0 \tag{92}
$$

となるので、T_ωが十分に大きければ必ず以下の漸近性が成り立つ。

$$
e^{-(\omega+\lambda_j) T_\omega} \to 0 \tag{93}
$$

式(93)の成り立つ、つまり十分な時間が経過した後は

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega}{V} I_\omega(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) = \mathbf{\Omega}_0 \cdot \nabla I_\omega(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) - \Sigma_t I_\omega(\mathbf{r}_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
+ \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out}) I_\omega(\mathbf{r}_0, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})\} \\
+ \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \{\chi_p(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_p(E_0) \Sigma_f(E_0) I_\omega(\mathbf{r}_0, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})\} \\
+ \sum_j \frac{\lambda_j}{\omega + \lambda_j} \int dE_{out} \int d\,\mathbf{\Omega}_{out} \{\chi_{dj}(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_{dj}(E_0) \Sigma_f(E_0) I_\omega(\mathbf{r}_0, E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out})\}
\end{aligned}
\tag{94}
$$

導出した式は随伴式(46)に一致する。従って Natural Mode 式、ω固有値方程式の随伴式を満たす随伴中性子束は、評価したい地点においた中性子源が十分な時間経過後になす中性子束の振幅に比例する。この式の導出が文献[2]の主たる成果である。この式を導出した後から式(73)を導出したところ、Bell & Glasstone の文献[6]に気付いて少々気落ちしたが、式(94)の導出には前記下線部③を考慮してのバランス式の想起が必要で、T_ωの要件も明示しており、それなりの差別化を図れたと自負している。

3.4 指数実験が成立する条件での中性子束の振幅

指数実験が成立する条件を考える。便宜的に細長い、長手方向が一様な核物質の長手方向を z 軸方向とし、x,y 方向の幾何学バックリングが物質バックリングよりも大きい条件を問題として設定する。ここで

$$
\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \mathbf{e}_y + z_0 \mathbf{e}_z \tag{95}
$$

という位置にエネルギーE_0、飛行方向$\mathbf{\Omega}_0$ の中性子源を配置する。中性子源の配置の仕方として 3.1 節は第 0 世代のみ、3.2, 3.3 節は時刻ゼロに瞬間的に配置としたが、この節では中性子源はおいたままとし、「世代」や「時間」に対して定常状態なものを検討する。$\mathbf{r}_0$ から z 方向に十分な距離 Z 離れた位置の中性子束分布は基本モード$\phi_\gamma(x,y)$に漸近し、振幅は Z 離れた位置で I_γ $(x_0,y_0,E_0,\mathbf{\Omega}_0)$になるとする。3.1~3.3 節と異なり、$I_\gamma$が源地点の z 座標に依存しないとしているが、そもそも指数実験条件では z 方向は長く、かつ組成が一様であることによる。指数法条件では高さが z_0+Z のあたりから中性子束が z 方向に指数関数的に減少する。$z \neq z_0+Z$ の位置まで含めて中性子束を表すと以下となる。

$$
\Psi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) \to I_\gamma(x_0, y_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \phi_\gamma(x, y, E, \mathbf{\Omega}) e^{-\gamma(z-(z_0+Z))} \tag{96}
$$

ここで、$z=z_0$ 上の地点 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}_0+\mathbf{\Omega}_0 d\xi$に飛行する中性子に対する $z=z_0+Z$ 面上での中性子束の振幅に関するバランス式を作成する。ここで図 3-1 と類似だが、空間的な状況を想像しやすいように図 3-2 を示す。

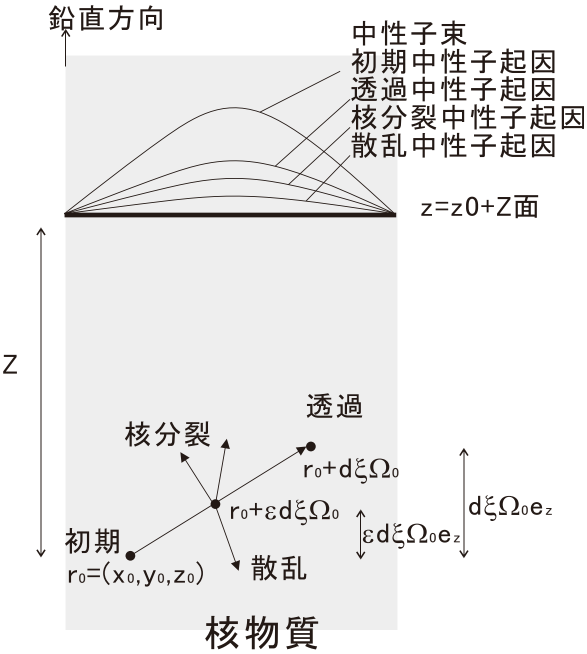

図 3-2 指数実験条件での I_γのバランス式についての模式図

3.1~3.3 節と異なるのは、散乱や核分裂反応地点、透過した地点と、地点 $\mathbf{r}_0$ で z 方向高さが異なることに着目する点である。例えば $\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0 d\xi$地点は$\boldsymbol{\Omega}_0\cdot\mathbf{e}_z d\xi$だけ高さが異なる。例によって $z=z_0+Z$ 面での振幅のバランスをとる際は、この領域で中性子束が指数関数 $e^{-\gamma z}$ に従って減少していくことを考慮して、補正が必要となる。その補正を加味してバランス式は以下になる。

$$\begin{aligned}
I_\gamma(\mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) = {} & e^{\gamma \mathbf{e}_z\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 d\xi}(1-\Sigma_t d\xi) I_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0 d\xi, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + e^{\gamma \mathbf{e}_z\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 \varepsilon d\xi} \int dE_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(E_0\to E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_0\to\boldsymbol{\Omega}_{out}) \\
& + \chi_t(E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})\nu_t(E_0)\Sigma_f(E_0)\} d\xi I_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0\varepsilon d\xi, E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})
\end{aligned} \tag{97}$$

右辺第 1 項の指数部を Tayler 展開の一次の項までとる。

$$\begin{aligned}
I_\gamma(\mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) = {} & (1+\gamma\mathbf{e}_z\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 d\xi)(1-\Sigma_t d\xi) I_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0 d\xi, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + e^{\gamma \mathbf{e}_z\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 \varepsilon d\xi} \int dE_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(E_0\to E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_0\to\boldsymbol{\Omega}_{out}) \\
& + \chi_t(E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})\nu_t(E_0)\Sigma_f(E_0)\} d\xi I_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0\varepsilon d\xi, E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})
\end{aligned} \tag{98}$$

右辺第 1 項目の二つの丸括弧の積で二次の微小量を無視する。

$$\begin{aligned}
I_\gamma(\mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) = {} & I_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0 d\xi, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) + (\gamma\mathbf{e}_z\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 - \Sigma_t) d\xi I_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0 d\xi, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + e^{\gamma \mathbf{e}_z\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 \varepsilon d\xi} \int dE_{out} \int d\boldsymbol{\Omega}_{out} \{\Sigma_s(E_0\to E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_0\to\boldsymbol{\Omega}_{out}) \\
& + \chi_t(E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})\nu_t(E_0)\Sigma_f(E_0)\} d\xi I_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0\varepsilon d\xi, E_{out}, \boldsymbol{\Omega}_{out})
\end{aligned} \tag{99}$$

右辺第 1 項を Tayler 展開して一次の項までとる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) = {} & \mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) + \mathrm{d}\xi\boldsymbol{\Omega}_0\cdot\left(\mathbf{e}_\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \mathbf{e}_\mathrm{y}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} + \mathbf{e}_\mathrm{z}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\right)\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + (\gamma\mathbf{e}_\mathrm{z}\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 - \Sigma_\mathrm{t})\mathrm{d}\xi\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0\mathrm{d}\xi,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + e^{\gamma\mathbf{e}_\mathrm{z}\cdot\boldsymbol{\Omega}_0\varepsilon\mathrm{d}\xi}\int \mathrm{dE}_\mathrm{out}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out}\{\Sigma_\mathrm{s}(\mathrm{E}_0\to\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_0\to\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out}) \\
& + \chi_\mathrm{t}(\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out})\nu_\mathrm{t}(\mathrm{E}_0)\Sigma_\mathrm{f}(\mathrm{E}_0)\}\mathrm{d}\xi\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0\varepsilon\mathrm{d}\xi,\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out})
\end{aligned}
\tag{100}
$$

左辺を差し引く

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \mathrm{d}\xi\boldsymbol{\Omega}_0\cdot\left(\mathbf{e}_\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \mathbf{e}_\mathrm{y}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} + \mathbf{e}_\mathrm{z}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\right)\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) + (\gamma\mathbf{e}_\mathrm{z}\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 - \Sigma_\mathrm{t})\mathrm{d}\xi\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0\mathrm{d}\xi,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + e^{\gamma\mathbf{e}_\mathrm{z}\cdot\boldsymbol{\Omega}_0\varepsilon\mathrm{d}\xi}\int \mathrm{dE}_\mathrm{out}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out}\{\Sigma_\mathrm{s}(\mathrm{E}_0\to\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_0\to\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out}) \\
& + \chi_\mathrm{t}(\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out})\nu_\mathrm{t}(\mathrm{E}_0)\Sigma_\mathrm{f}(\mathrm{E}_0)\}\mathrm{d}\xi\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0\varepsilon\mathrm{d}\xi,\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out})
\end{aligned}
\tag{101}
$$

全体を dξで除する。

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \boldsymbol{\Omega}_0\cdot\left(\mathbf{e}_\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \mathbf{e}_\mathrm{y}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} + \mathbf{e}_\mathrm{z}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\right)\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) + (\gamma\mathbf{e}_\mathrm{z}\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 - \Sigma_\mathrm{t})\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0\mathrm{d}\xi,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + e^{\gamma\mathbf{e}_\mathrm{z}\cdot\boldsymbol{\Omega}_0\varepsilon\mathrm{d}\xi}\int \mathrm{dE}_\mathrm{out}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out}\{\Sigma_\mathrm{s}(\mathrm{E}_0\to\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_0\to\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out}) \\
& + \chi_\mathrm{t}(\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out})\nu_\mathrm{t}(\mathrm{E}_0)\Sigma_\mathrm{f}(\mathrm{E}_0)\}\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\Omega}_0\varepsilon\mathrm{d}\xi,\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out})
\end{aligned}
\tag{102}
$$

さらに dξ→0 をとる

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \boldsymbol{\Omega}_0\cdot\left(\mathbf{e}_\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \mathbf{e}_\mathrm{y}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} + \mathbf{e}_\mathrm{z}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\right)\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) + (\gamma\mathbf{e}_\mathrm{z}\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 - \Sigma_\mathrm{t})\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + \int \mathrm{dE}_\mathrm{out}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out}\{\Sigma_\mathrm{s}(\mathrm{E}_0\to\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_0\to\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out}) \\
& + \chi_\mathrm{t}(\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out})\nu_\mathrm{t}(\mathrm{E}_0)\Sigma_\mathrm{f}(\mathrm{E}_0)\}\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0,\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out})
\end{aligned}
\tag{103}
$$

ここで $\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0)$という量は、位置 $\mathbf{r}_0$ から z 方向に Z だけ離れた面での中性子束を示すもので、中性子源を配置した位置の z 座標が z_2 なら、$\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{r}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0)$は $z=z_2+Z$ 面の振幅を指すだけであること、また、指数実験法の条件が成り立つのは z 方向の組成が一様であることを思料すると、z 方向の偏微分はゼロとなり、$\mathbf{r}_0$ の関数としていたものは全て(x_0,y_0)の関数に置き換わる。

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \boldsymbol{\Omega}_0\cdot\left(\mathbf{e}_\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \mathbf{e}_\mathrm{y}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right)\mathrm{I}_\gamma(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) + (\gamma\mathbf{e}_\mathrm{z}\cdot\boldsymbol{\Omega}_0 - \Sigma_\mathrm{t})\mathrm{I}_\gamma(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0) \\
& + \int \mathrm{dE}_\mathrm{out}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out}\{\Sigma_\mathrm{s}(\mathrm{E}_0\to\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_0\to\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out}) \\
& + \chi_\mathrm{t}(\mathrm{E}_\mathrm{out},\boldsymbol{\Omega}_\mathrm{out})\nu_\mathrm{t}(\mathrm{E}_0)\Sigma_\mathrm{f}(\mathrm{E}_0)\}\mathrm{I}_\gamma(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{E}_0,\boldsymbol{\Omega}_0)
\end{aligned}
\tag{104}
$$

比較のために整理をかける。

$$
\begin{aligned}
&\gamma \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{\Omega}_0 I_\gamma(x_0, y_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
&\qquad = -\mathbf{\Omega}_0 \cdot \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}\right) I_\gamma(x_0, y_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) + \Sigma_t I_\gamma(x_0, y_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
&\qquad - \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \Sigma_s(E_0 \to E_{out}, \mathbf{\Omega}_0 \to \mathbf{\Omega}_{out}) I_\gamma(x_0, y_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0) \\
&\qquad - \int dE_{out} \int d\mathbf{\Omega}_{out} \chi_t(E_{out}, \mathbf{\Omega}_{out}) \nu_t(E_0) \Sigma_f(E_0) I_\gamma(x_0, y_0, E_0, \mathbf{\Omega}_0)
\end{aligned}
\tag{105}
$$

これは式(49)と同形状となっている。したがってγ固有値方程式の随伴式の固有関数である随伴中性子束$\phi_\gamma(x,y,E,\mathbf{\Omega}_0)$は、位置(x, y)に配置した中性子を起源として、z 方向に十分な距離をはなれた地点に形成する中性子束の振幅に比例するといえる。

4. まとめ

本稿で述べてきたことをまとめると表 4-1 になる。そもそも固有値方程式は、時間依存中性子輸送方程式が、世代の経過や時間の経過、空間位置の方向に沿って同じ形状で変化する状況、すなわち形状が基本モードに漸近して振幅が変化する状況を示すものである。これに対し、随伴中性子は、評価地点に源をおいた際に形成される基本モードの中性子束の振幅に比例する、ということとなる。また、「中性子束の振幅」としたが、その中性子束によって誘導される反応の反応率は随伴中性子束と基本的に比例する。当然、総核分裂数、総核分裂中性子発生数、発熱量も比例する。

随伴中性子束と、基本モード中性子束の振幅の比例性を使うと、随伴中性子束は、連鎖反応の経過に沿った計算で評価できる。これにより、随伴中性子束の計算に連続エネルギーモンテカルロ法が利用できる。定常方程式の随伴中性子束は、評価点に中性子源をおいて固有値計算を行い、世代毎中性子発生数比 k_n をとり、それの総積をとることで得られる。α固有値方程式の随伴中性子束については、遅発中性子発生を強制的に零として、評価点からの固定源計算を行い、時間に対して中性子束を tally することで評価できる。ω固有値方程式も同様である。ただし遅発中性子発生を含む固定源計算を行うこと、さらには遅発中性子が平衡条件に達するまで連鎖反応をシミュレートする必要がある。筆者は文献[12]でべき乗法を利用した動特性計算で 15000~20000 世代の計算を行うことで随伴中性子束を評価しているが、計算資源を相当に要している。γ固有値方程式の随伴中性子束は、指数実験法が成立する体系で、評価点に点源を配置して、z 軸方向で遠方での中性子束の指数関数的減衰を計算することで評価可能である。

なお本稿で説明する随伴中性子束計算はどの点に対しても計算することができるものの、1 回の計算で 1 点のデータしか得られず、同時に広い領域を計算することはできない[4]。この点は、固有値と固有関数の分布を同時に計算できることに比べて煩雑なところで、効率的

[4] 複数のソースに対して同時に計算するには「標識」をつけて、子孫の中性子に「標識」を相続させ、評価段階で標識付き中性子による中性子を計数するコーディングが必要

計算には工夫が必要となる。

筆者は従前の随伴中性子束に関する教科書[7]の説明がどうも腑に落ちなかったことがあり、3 章の検討を行って初めて随伴中性子束の意味を認識できた[5]。しかし、従来の随伴中性子束に関する説明をよく理解されておられる読者の方には、ぜひ本稿と見比べて新な展開をご検討いただきたい。また本稿で述べている随伴中性子束の計算法は、特にω固有値問題の随伴中性子束計算等は、かなり負荷が大きい。なんでも MC 法で計算するべきだなどと考えずに、目的と差し迫った納期に応じて使いやすい道具を使っていただきたい。

表 4-1. 固有値方程式と随伴中性子束の比較

固有値方程式	定常方程式	α固有値方程式	Natural Mode 式=ω固有値方程式	γ固有値方程式
固有値方程式が成立する条件	核分裂連鎖反応の世代が進み、中性子束分布形状が世代によって変わらず、振幅の世代間比が k_{eff} に収束する条件	即発中性子による核分裂連鎖反応の時間範囲で、時間に対して中性子束形状が変わらず、振幅が時間の指数関数で変化する条件	遅発中性子と即発中性子による連鎖反応の時間範囲で時間に対して中性子束形状変わらず、振幅が時間の指数関数で変化する条件	指数実験が可能な条件で、水平方向の中性子束分布の形状が鉛直方向位置に対して変わらず、振幅が鉛直方向位置の指数関数で変化する条件
固有値	実効増倍率 k_{eff}	α固有値 即発中性子減衰定数	ω固有値 炉周期の逆数	γ固有値 指数減衰定数
固有値の意味	連鎖反応での世代毎の中性子束の振幅比	即発中性子連鎖反応での時間に対する中性子束の相対変化率	遅発中性子を含む連鎖反応での時間に対する中性子束の相対変化率	指数実験条件での鉛直方向位置に対する中性子束の相対変化率
固有値の測定可否	遅発臨界でのみ可	未臨界～遅発臨界条件程度まで可	即発未臨界条件で可	未臨界・かつ指数実験成立条件で可
中性子束	$\phi_s(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})$	$\phi_\alpha(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})$	$\phi_\omega(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})$	$\phi_\gamma(x,y,E,\boldsymbol{\Omega})$
計算法	べき乗法	遅発中性子を含まない固定源時間依存動特性計算、α-k 法他	遅発中性子を含む時間依存動特性計算、α-k 法、weight balance 法、他、	γ固有値計算、固定源計算
随伴中性子束	$\phi_s^\dagger(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})$	$\phi_\alpha^\dagger(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})$	$\phi_\omega^\dagger(\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega})$	$\phi_\gamma^\dagger(x,y,E,\boldsymbol{\Omega})$

[5] 式のフォローをされた読者の方にはお世話様と申し上げたい

随伴中性子束の物理的意味	評価する(**r**,E,**Ω**)に配置した中性子源に誘導される、十分な世代を経た後のある世代に形成される定常方程式を満たす基本モード中性子束の振幅	即発中性子による核分裂連鎖反応の時間範囲で、評価する(**r**,E,**Ω**)に配置した中性子源に誘導される十分な時間を経たある時間に形成されるα固有値方程式の基本モード中性子束の振幅	遅発中性子と即発中性子による連鎖反応の時間範囲で、評価する(**r**,E,**Ω**)に配置した中性子源に誘導される十分な時間を経たある時間に形成されるω固有値方程式の基本モード中性子束の振幅。十分な時間の必要条件は $\exp(-(\lambda_j+\omega)t)\rightarrow 0$	指数実験が成立する燃料において、評価する(x,y,E,**Ω**)に配置した中性子源をよって誘導される、鉛直方向に十分な距離で形成されるγ固有値方程式の基本モード中性子束の振幅
随伴中性子束の計算法	評価点(**r**,E,**Ω**)に中性子源を配置してべき乗法で世代間中性子発生数比 k_m を計算し、ある世代 M まで $\Pi_{m=1}^{M}k_m$ を計算する	評価点(**r**,E,**Ω**)に中性子源を配置して、遅発中性子発生を off にして固定源計算である時間後の中性子束を tally する	評価点(**r**,E,**Ω**)に中性子源を配置して遅発中性子先行核の崩壊も含めた固定源計算を行い、ある時間後の中性子束を tally する	評価点(x,y,E,**Ω**)に中性子源を配置して遅発中性子も含めて固定源計算を実施し、ある高さでの中性子束を tally する

参考文献

[1] Yasushi Nauchi, Takanori Kameyama,"Development of calculation technique for iterated fission probability and reactor kinetic parameters using continuous-energy Monte Carlo method", *Journal of Nuclear Science and Technology* **47**(11), 977–990, 2010.

[2] Yasushi Nauchi, “Adjoint flux calculation of natural mode equation by time dependent neutron transport”, *Journal of Nuclear Science and Technology*, **57**(8), 1000–1013, 2020.

[3] Yasushi Nauchi and Tetsuo Matsumura,” Adjoint flux and perturbation theory of γ-mode eigenvalue problem appearing in exponential experiments”, *Nuclear Science and Engineering* **162**(11) 1306-1322, 2022.

[4] H. Hurwitz, Naval reactor physics handbook, Vol. 1, A. Radkowsky (Ed.), U. S. Atomic Energy Commission, 864–869 (1964).

[5] L. N. Ussachoff “Equation for the importance of neutrons, reactor kinetics and the theory of perturbations,” Proc. Int. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, Switzerland, August 8–21,

1955, Vol. 5, p.503 (1956).
[6] G. I. Bell and S. Glasstone, Nuclear reactor theory, Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida (1970).
[7] J. J. Duderstadt and L. J. Hamilton, Nuclear reactor analysis, John Wiley & Sons Inc., New York (1976).
[8] W. M. Stacey, Jr. Space-Time Nuclear Reactor Kinetics, Academic Press Inc, NY, US and London, UK, (1969).
[9] T. Yamamoto and Y. Miyoshi, “An algorithm of α- and γ-mode eigenvalue calculations by Monte Carlo method,” Proc. 7th Int. Conf. on Nuclear Criticality Safety, (ICNC 2003), Tokai, Japan, October 20–24, 2003, JAERI-Conf 2003–019, Japan Atomic Energy Research Institute, 2003.
[10] T. Suzaki, “Subcriticality Determination of Low-Enriched UO_2 Lattices in Water by Exponential Experiment”, *Journal of Nuclear Science and Technology,* **28**(12),1067, 1991.
[11] 小林啓祐,「原子炉物理」, コロナ社, (1996).
[12] Yasushi Nauchi, "Estimation of time-dependent neutron transport from point source based on Monte Carlo power iteration", *Journal of Nuclear Science and Technology*, **56**(11), 996-1005, 2019.