

< 部会員の声 >

中性子の減速過程におけるエネルギー損失の平均値

北海道大学 千葉 豪
名古屋大学 山本章夫、遠藤知弘

説明を始める前に、まずは議論の骨子・概要を示しておく。

- 1個の中性子が軽水素で1回散乱されたとき、平均的に1/2倍のエネルギーになる。
- 1個の中性子が軽水素で多数回散乱されたとき、幾何平均の考え方に基づくならば、1回の散乱あたり平均的に1/e倍のエネルギーになる。
- 多数の中性子がそれぞれ軽水素で1回散乱されたとき、多数の中性子のエネルギーの単純平均は元の値の1/2倍になる。
- 多数の中性子がそれぞれ軽水素で多数(I)回散乱されたとき、多数の中性子のエネルギーの単純平均は元の値の $(1/2)^I$ 倍になる。
- 多数の中性子がそれぞれ軽水素で多数(I)回散乱されたとき、多数の中性子のエネルギーの中央値は元の値の $(1/e)^I$ 倍に近い値をとる。

エネルギー E_0 の中性子が静止している原子核と衝突（弾性散乱）した後に E から $E + dE$ のエネルギーになる確率 $P(E)dE$ は、重心系で等方散乱を仮定すると以下の式で記述される。

$$P(E)dE = \frac{dE}{(1-\alpha)E_0} \quad (1)$$

ここで α は、中性子の質量を m 、衝突した原子核の質量を M とし、 $A = M/m$ としたとき、

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2 \quad (2)$$

で定義されるパラメータである。式(1)の意味するところは、「原子核と衝突したエネルギー E_0 の中性子は、エネルギー区間 $[\alpha E_0, E_0]$ 内の微小エネルギー幅 dE に等確率でなりうる」という、極めて簡単なものである。

以降では、簡単のため、中性子と軽水素との衝突を考える。この場合、 $M = m$ となるため、 $\alpha = 0$ となり、衝突により中性子は完全にそのエネルギーを失うこともある。

軽水素との1回の衝突で中性子は平均的に1/2のエネルギーを失うと考えてよいが、例えば3回の衝突後にはどの程度のエネルギーを失うであろうか？1回あたり1/2程度なので、その3乗ということで、大体1/8くらいまでエネルギーが小さくなると考えてよいだろうか？その場合には、1MeVの中性子が1eVに減速されるまでに必要な平均衝突回数は20程度と計算される。

しかしこれは適切ではなく、本来はもっと少ない衝突回数で減速が行われると考えたほうが良い。

この点についてはどの炉物理の教科書にも詳細に記述しており、分かりやすい解説としては文献[1]のものが挙げられる。この文献の記述を参考にして説明しよう。例えば、ある中性子が連続して計 I 回の衝突を行い、 i 回目の衝突ではエネルギーが β_i 倍となるとする。ここで、 $0 \leq \beta_i \leq 1$ である。 I 回の衝突後の

中性子エネルギーは $\beta_1\beta_2\cdots\beta_I$ 倍となるが、この衝突 1 回あたりの平均のエネルギー変化を $\bar{\beta}$ とするならば、 $\bar{\beta}$ は以下の式で決められることになるであろう。

$$\bar{\beta}^I = \beta_1\beta_2\cdots\beta_I \quad (3)$$

従って、 $\bar{\beta}$ は

$$\bar{\beta} = \sqrt[I]{\beta_1\beta_2\cdots\beta_I} \quad (4)$$

と定義される。つまり、ある中性子が連続して衝突したときの衝突 1 回あたりの平均のエネルギー変化は、単純平均ではなく幾何平均で考えるべきである、ということを示している。平均のエネルギー変化を $1/2$ とするのは単純平均に基づく考え方であって、これを用いるべきではないということになる。

式 (4) の両辺の対数をとることにより、以下の式を得る。

$$\ln \bar{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^I \ln \beta_i}{I} \quad (5)$$

この式は、幾何平均に基づく 1 回の衝突あたりの中性子の平均エネルギー変化の対数値は、各衝突回でのエネルギー変化の対数についての単純平均に対応することを示している。従って、中性子の減速過程を中性子エネルギーの対数値、すなわちレサジーで考えるならば、衝突 1 回あたりに中性子が失うエネルギーに相当する量（ここではレサジー）は単純平均で考えてよいことになる。1 回の衝突あたりに失うエネルギー対数値の平均 \ln^-E は以下の式で計算される。

$$\ln^-E = \int_0^{E_0} \ln EP(E)dE = \int_0^{E_0} \frac{\ln E}{E_0} dE = \ln E_0 - 1 \quad (6)$$

この式は、1 回の衝突によって中性子のエネルギー対数値（レサジー）は平均で 1.0 減少することを意味している。また、 $\ln^-E = \ln \hat{E}$ となる \hat{E} は $\ln^-E = \ln \left(\frac{E_0}{e} \right)$ より、

$$\hat{E} = \frac{E_0}{e} \quad (7)$$

と求められる。従って、幾何平均の考え方に基づくならば、1 回の衝突で中性子エネルギーは平均的に $1/e$ 倍となることが言える。

以上では、1 個の中性子の複数回の衝突による減速過程を考えてきたと言える。今度は、複数の中性子からなる「中性子集団」の減速過程について考えよう。ここでは中性子エネルギーの損失割合を考えるので、簡単のため初期エネルギーを 1 として考えることとする。

はじめに、 I 回の衝突後の中性子エネルギーの確率密度関数 $P_I(E)$ について考えよう。なお、この問題での衝突後の中性子エネルギーの台（区間）は $[0, 1]$ である。 $I = 1$ については、初期エネルギーを 1 としているので $P_1(E) = 1$ が得られる。また、 $P_2(E)$ については以下のように得られる。

$$P_2(E) = \int_E^1 P_1(E')P(E' \rightarrow E)dE' = \int_E^1 \frac{dE'}{E'} = [\ln E']_E^1 = -\ln E \quad (8)$$

なお、 $P(E' \rightarrow E)dE$ はエネルギー E' の中性子が衝突によってエネルギー E から $E + dE$ に減速される確率を示す。同様に、 $P_3(E)$ は以下のように得られる。

$$P_3(E) = \int_E^1 P_2(E')P(E' \rightarrow E)dE' = \int_E^1 (-\ln E') \cdot \frac{dE'}{E'} = -\frac{1}{2} [(\ln E')^2]_E^1 = \frac{1}{2} (\ln E)^2 \quad (9)$$

$P_2(E)$ と $P_3(E)$ が上記のように表されることから、 $P_I(E) = \gamma_I (\ln E)^{I-1}$ と書けると仮定しよう。このとき、

$$\begin{aligned} P_{I+1}(E) &= \int_E^1 P_I(E') P(E' \rightarrow E) dE' = \int_E^1 \gamma_I \frac{(\ln E')^{I-1}}{E'} dE' \\ &= \gamma_I \left[\frac{1}{I} (\ln E')^I \right]_E^1 = -\frac{\gamma_I}{I} (\ln E)^I = -\frac{1}{I} (\ln E) P_I(E) \quad (10) \end{aligned}$$

と書けることから、 $P_I(E)$ は以下のように書けることが分かる。

$$P_I(E) = \left\{ \prod_{i=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{i} \right) \right\} (\ln E)^{I-1} \quad (11)$$

次に、ここで得られた $P_I(E)$ を用いて、 I 回の衝突後の中性子エネルギーの（単純）平均値 \bar{E}_I を求めよう。 \bar{E}_I は以下のように記述できる。なお、以降では積分範囲の記述は省略する。

$$\begin{aligned} \bar{E}_I &= \int E \prod_{i=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{i} \right) (\ln E)^{I-1} dE \\ &= \prod_{i=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{i} \right) \left\{ \left[\frac{1}{2} E^2 (\ln E)^{I-1} \right] - \int \frac{1}{2} E^2 (I-1) (\ln E)^{I-2} \frac{1}{E} dE \right\} \\ &= \prod_{i=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{i} \right) \left(-\frac{I-1}{2} \int E (\ln E)^{I-2} dE \right) \\ &= \prod_{i=1}^{I-2} \left(-\frac{1}{i} \right) \left(\frac{1}{2} \int E (\ln E)^{I-2} dE \right) = \frac{1}{2} \bar{E}_{I-1} \quad (12) \end{aligned}$$

\bar{E}_1 は $1/2$ であるので、

$$\bar{E}_I = \left(\frac{1}{2} \right)^I \quad (13)$$

が得られる。

さらに、 I 回の衝突後の中性子エネルギーから、1回の衝突でのエネルギーの変化割合 $\Delta \bar{E}_I$ を求めよう。エネルギー 1 の中性子が衝突後にエネルギー E になったので、衝突 1 回あたりにエネルギーが $E^{1/I}$ 倍になっていると考えると、 $\Delta \bar{E}_I$ は以下で定義される。

$$\Delta \bar{E}_I = \int (E)^{1/I} P_I(E) dE \quad (14)$$

この式を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} \Delta \bar{E}_I &= \int E^{1/I} \prod_{i=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{i} \right) (\ln E)^{I-1} dE = \prod_{i=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{i} \right) \int E^{1/I} (\ln E)^{I-1} dE \\ &= \prod_{i=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{i} \right) \left\{ \left[\frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} (\ln E)^{I-1} \right] - \int \frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} (I-1) (\ln E)^{I-2} \frac{1}{E} dE \right\} \\ &= \prod_{i=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{i} \right) \left(-\frac{I}{I+1} (I-1) \right) \int E^{1/I} (\ln E)^{I-2} dE \\ &= \prod_{i=1}^{I-2} \left(-\frac{1}{i} \right) \left(\frac{I}{I+1} \right) \int E^{1/I} (\ln E)^{I-2} dE \quad (15) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int E^{1/I} (\ln E)^i dE &= \left[\frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} (\ln E)^i \right] - \int \frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} (\ln E)^{i-1} \frac{1}{E} dE \\ &= -\frac{I}{I+1} \cdot i \int E^{1/I} (\ln E)^{i-1} dE \end{aligned} \quad (16)$$

となることから、

$$\Delta \bar{E}_I = \left(\frac{I}{I+1} \right)^I \quad (17)$$

が得られる。

$I \rightarrow \infty$ の極限をとった場合には以下となる。

$$\lim_{I \rightarrow \infty} \Delta \bar{E}_I = \lim_{I \rightarrow \infty} \left(\frac{I}{I+1} \right)^I = \lim_{I \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+1/I} \right)^I = \frac{1}{\lim_{I \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{I} \right)^I} = \frac{1}{e} \quad (18)$$

つまり、衝突回数が多い場合には、中性子と軽水素との1回の衝突において、(幾何)平均的にエネルギーが $1/e$ 倍となることが分かる。Fig. 1 に、中性子が軽水素と有限回数衝突したときの、衝突1回あたりに失われる中性子エネルギー相対値の幾何平均を示す。1回のみの衝突では平均は当然0.5となるが、回数が大きくなるにつれて $1/e$ に漸近していく様子が見られる。

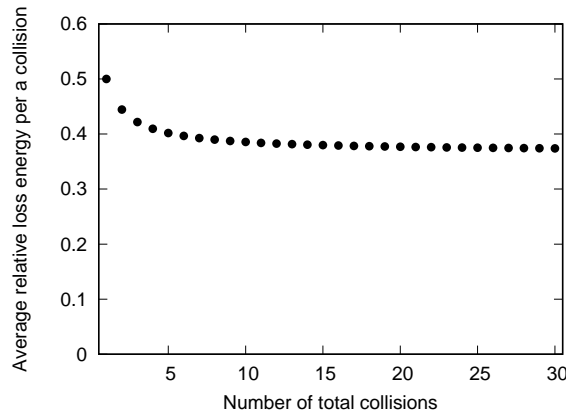


Fig. 1: Geometrical average energy loss of neutron per one collision with hydrogen-1

I 回の衝突後の中性子の平均エネルギーは式 (13) で与えられることから、この式に基づくと1回の衝突あたりのエネルギーの平均的な変化割合は $(1/2)$ であると解釈されるが、式 (18) では $(1/e) \approx (1/2.7)$ と異なった値を与える。これは一見、不思議な結果であるように思われるかもしれない。この理由については以下で議論する。

とりあえず、ここまでの議論から、「中性子の減速過程におけるエネルギー損失の平均値」には以下のような考え方があると整理できるであろう。

- 1回の衝突あたりに失うエネルギーの単純平均値
- 1回の衝突あたりに失うエネルギーの幾何平均値
- 1回の衝突あたりに失うレサジーの単純平均値

I 回の衝突後の中性子のエネルギーが従う式 (11) で示される確率密度関数は Uniform Product Distribution (UPD) と呼ばれる分布関数に対応している [2]。UPD は、区間 $[0,1]$ における一様乱数の I 個の積が従う確率分布であり、その平均値は式 (13) で示されているように $\left(\frac{1}{2}\right)^I$ で与えられる。

軽水素との衝突により中性子が失うエネルギー変化に対応するものとして区間 $[0,1]$ における一様乱数を R_i と記述したとき、 I 個の R_i の積、すなわち I 回の衝突による中性子のエネルギー変化 Q_I を以下のように定義する。

$$Q_I = \prod_{i=1}^I R_i \quad (19)$$

この Q_I は UPD に従う確率変数となる。また、この両辺の対数をとると以下を得る。

$$\ln Q_I = \sum_{i=1}^I \ln R_i \quad (20)$$

ここで、 $\hat{Q}_I = \ln Q_I$ 、 $\hat{R}_i = \ln R_i$ と定義する。 R_i が $[0,1]$ を台とする一様分布に従うので、 \hat{R}_i は、台が $(-\infty,0]$ 、確率密度関数が $f(\hat{r}_i) = \exp(\hat{r}_i)$ となり、確率変数の符号を反転させた母数 1 の指数分布となる。従って、 \hat{R}_i の期待値として -1 が、分散として 1 が、それぞれ得られる。これより、 \hat{Q}_I の期待値と分散は以下のように計算できる。

$$E[\hat{Q}_I] = E\left[\sum_{i=1}^I \hat{R}_i\right] = \sum_{i=1}^I E[\hat{R}_i] = -I, \quad (21)$$

$$V[\hat{Q}_I] = V\left[\sum_{i=1}^I \hat{R}_i\right] = \sum_{i=1}^I V[\hat{R}_i] = I \quad (22)$$

互いに独立で同一の指数分布に従う確率変数の和が従う分布はアーラン分布 (Erlang distribution) として知られている。上記の $\hat{Q}_I = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i$ は、確率変数の符号を反転させたアーラン分布に従うと言え、式 (21)、(22) における期待値、分散はアーラン分布に対して与えられているものと一致する。

ここで、 $I=1$ から 5 について、 Q_I と \hat{Q}_I の 10,000 個の標本から得た頻度分布を Fig. 2 に示す。 Q_I は、 $I=1$ のとき平坦分布となり、 I の増加に伴い右側に裾を有する歪んだ分布となる。この歪みが、前述した一見矛盾と思える結果の原因となっていると言えるであろう。一方、 \hat{Q}_I は $I=1$ のときに左側に裾を有する歪んだ分布となるが、 I の増加に伴い対称性を有する分布となる。

中性子の減速過程を考える際に、 I 回の衝突後の中性子エネルギーの「平均値」に着目するよりも、むしろ「中央値 (メジアン)」に着目したほうが、物理的直感に即したものとなるのではないだろうか。衝突後の中性子エネルギーの中央値は「 I 回の衝突後に半数の中性子がそれ以下となるエネルギー」と解釈することが出来る。また、平均値で考えた場合には $E[\hat{Q}_I] \neq \ln E[Q_I]$ となるが、中央値で考えた場合には $M[\hat{Q}_I] = \ln M[Q_I]$ となる点でも都合が良い ($M[S]$ は確率変数 S の中央値であることを示す)。 Q_I 、 \hat{Q}_I の平均値、及び Q_I (\hat{Q}_I) の中央値を、異なる I の値について複数の標本から数値的に計算したものを Fig. 3 に示す。なお、 \hat{Q}_I については $\exp(\hat{Q}_I)$ のように (エネルギーに) 変換したものを図示している。 Q_I は $(1/2)^I$ で、 $\exp(\hat{Q}_I)$ は $(1/e)^I$ で、それぞれ減衰し、また、中央値は $(1/e)^I$ に近い振る舞いをする事が分かる。これは、中性子の集団が減速している場合、大多数の中性子は集団の平均エネルギーである $(1/2)^I$ より低いエネルギーまで減速していることを示している。一方、中性子のエネルギーを対数で (レサジーで) 考える場合には、平均値と中央値が同程度の値となるため、中性子集団は平均的に、平均エネルギー対数 (レサジー) に対応する $(1/e)^I$ より低いエネルギーまで減速していると言ってよいであろう。すなわち、エネルギーの対数 (レサジー) で中性子の減速を考えることで、平均値を考えるか、中央値を考えるか、と

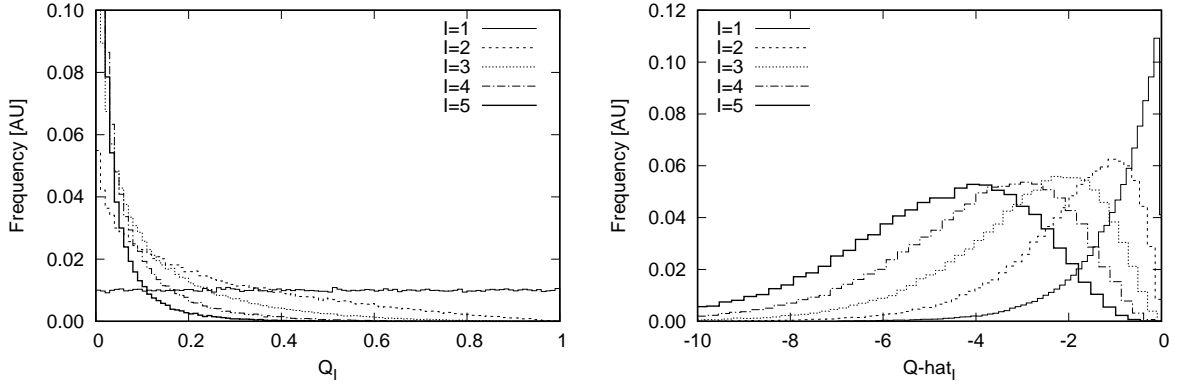


Fig. 2: Frequency distributions of q_I and \hat{Q}_I

いった曖昧さの影響を小さくできる、とも言えるであろう。

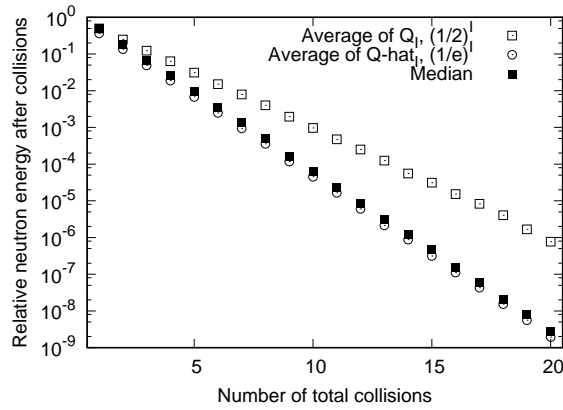


Fig. 3: Average and median of Q_I and \hat{Q}_I

中心極限定理を適用すると、 $I \rightarrow \infty$ のとき $\hat{Q}_I = \sum \hat{R}_i$ は正規分布に漸近していくと言える。従って、 $\hat{Q}_I = \ln Q_I$ より、 Q_I は対数正規分布に漸近する。正規分布となる \hat{Q}_I の期待値が $-I$ 、分散が I であることから、 Q_I の期待値として

$$E[Q_I] = \exp\left(-I + \frac{I}{2}\right) = \exp\left(-\frac{I}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^I \quad (23)$$

が得られる。この式は I 回の衝突後の中性子のエネルギーの平均値に対応するため、式 (13) と一致するものと考えられるが、そうっていない。このことは一見、矛盾しているようでもあるが、ここでは $I \rightarrow \infty$ の極限を考えているため、式 (13) も式 (23) もともにゼロに漸近する結果を与えている、と考えれば辻褃が合う。

一方で、 I 回衝突した後の 1 回あたりに失うエネルギー $\bar{\beta}$ についても同様のことを考える。以下に $\bar{\beta}$ の

定義を再掲する。

$$\bar{\beta} = \left(\prod_{i=1}^I R_i \right)^{1/I} \quad (24)$$

この両辺について対数をとると以下を得る。

$$\ln \bar{\beta} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \ln R_i \quad (25)$$

$\ln \bar{\beta}$ の期待値は Fig. 1 で示した値に対応し、 $I=1$ のときに 0.5 で、 I が大きくなると $1/e$ に漸近する。 \hat{Q}_I のときと同様に中心極限定理を適用すると、 $I \rightarrow \infty$ のとき $\ln \bar{\beta}$ は期待値が -1 、分散が $1/I$ の正規分布に漸近する。従って、 $\bar{\beta}$ は対数正規分布に漸近すると言え、このときの $\bar{\beta}$ の期待値として

$$E[\bar{\beta}] = \exp\left(-1 + \frac{1}{2I}\right) \quad (26)$$

が得られる。このとき $I \rightarrow \infty$ の極限をとると $E[\bar{\beta}] \rightarrow 1/e$ が得られ、Fig. 1 で示された値と整合する結果が得られる。ここでの議論は \hat{Q}_I を I で割っただけのものに対応するため、 \hat{Q}_I に対するものと同じ議論を繰り返しているようにも見える。しかし、式 (23) が中性子の集団に対して I 回の衝突後の平均エネルギーを計算しているのに対して、式 (25) は 1 回あたりの減速の程度を計算しており、物理的に異なった値になっていることに留意されたい。

中性子の減速に関しては、1983 年、斎藤慶一氏が日本原子力学会誌の「私のノートから」の欄に「中性子減速の数学モデル」と題したメモを寄稿している [3]。このメモには、中性子と軽水素との弾性散乱反応に関して、レサジー u における衝突回数 n_u の確率分布と n 回の衝突後のレサジー u_n の確率密度関数を考え、両者の平均がそれぞれ

$$\langle n_u \rangle = u, \quad (27)$$

$$\langle u_n \rangle = n, \quad (28)$$

と与えられる一方、エネルギー E における衝突回数 n_E の確率分布と n 回の衝突後のエネルギー E_n の確率密度関数の平均はそれぞれ

$$\langle n_E \rangle = \ln(E_0/E), \quad (29)$$

$$\langle E_n \rangle = E_0/2^n, \quad (30)$$

と与えられるため、 $\langle u_n \rangle \neq \ln(E_0/\langle E_n \rangle)$ となり、「衝突ごとに平均エネルギーは何倍になるか、という設問(説明)にあいまいさが生じ、 $1/2$ か $1/e$ かということになる」という記述があり、古くから議論されている内容であることが分かる。また、文献 [4] も同様の内容に関するものであるので、興味のある方は是非目を通して(解説して)いただければと思う。

参考文献

[1] 原澤進、「基礎原子力講座 4、原子炉入門」、コロナ社

[2] <https://mathworld.wolfram.com/UniformProductDistribution.html>

- [3] 斎藤慶一、「中性子減速の数学モデル」、日本原子力学会誌、**25**[10], p. 808-809 (1983).
- [4] E.R. Cohen, 'How many collisions to slow down a neutron?' *Nucl. Sci. Eng.*, **89**, p. 99-108 (1985).