

&lt; 自由投稿 &gt;

## 未臨界系での中性子増倍に対する考察

日本原子力研究開発機構 千葉 豪、西原健司  
名古屋大学 遠藤知弘

### 1 はじめに

筆者の一人(千葉)は、これまで臨界炉のみを興味の対象としており、中性子の増倍率といえば  $k_{\text{eff}}$  であったし、中性子輸送方程式といえば  $(1/k_{\text{eff}})$  が右辺にある固有値方程式であった。ところが聞くとところによると、未臨界系での中性子のふるまいは臨界系でのそれとは大きく異なるらしく、また未臨界系の増倍率にはいろいろな定義のものがあるらしい。さらに、「未臨界系の中性子束分布は固有関数では表現できない」という長髪の学生さんの挑発的な主張を学会で耳にするに及び、未臨界系の炉物理について知りたい、という気持ちがむくむくと膨れあがった。

そこで勉強を始めた。いくつか論文を読んだり長髪の学生さんに教を乞うたりして未臨界系の炉物理について少しずつ理解を深めていった。しかし、なかなか理解が進まない部分もあったので、この分野に造詣が深い同年代の研究者を議論に巻き込むことで勉強させてもらうこととした。それがここに筆者として名を連ねている西原、遠藤である。

三人で行ったメールでの議論は非常に興味深いものであり、これを内輪だけに留めておくのは勿体無いと考えた。また、議論の一部はいずれ論文誌などに掲載されるかもしれないが、専門外の人が目にする機会はなかなか無いであろうとも考えた。そこで、本紙の自由投稿欄を利用している次第である。本稿を読んで、臨界炉が主な興味の対象である方は新鮮に感じてくれるかもしれないし、この分野の先達の方からは「そんなことは常識だ」「頭を使わたくせにこんなことしか書けんのか」などとお叱りを受けるかもしれない。「いつも下らん論文ばかり書いている千葉が筆者の一人だから読むのはやめよう」などと思わず、引き続きよろしく目を通していただきたく思う。

### 2 未臨界系の中性子の増倍について

未臨界系では、外部中性子源が核分裂により増倍するが、系が未臨界であるゆえ世代を重ねる毎に減衰していく。従って、外部中性子源が定常であれば中性子束分布もある定常状態に落ち着く。

ここで、外部中性子源分布を  $q$ 、中性子束分布を  $\phi$  と記述し、系全体の外部中性子源  $Q$  を  $\langle q \rangle$ 、核分裂中性子源  $S$  を  $\langle \nu \Sigma_f \phi \rangle$  と定義する(ここでの括弧は全位相空間についての積分を示す)。未臨界系での中性子の増倍率としていくつかの定義が提案されているが、そのなかでよく用いられている未臨界増倍率  $k_{\text{sub}}$  は次のように定義される。

$$k_{\text{sub}} = \frac{S}{Q + S} \quad (1)$$

この式を  $S$  について書き直すと以下ようになる。

$$S = \frac{k_{\text{sub}}}{1 - k_{\text{sub}}} Q \quad (2)$$

さらにこの式は以下のような級数の和で表現できる。

$$S = Qk_{\text{sub}} + Qk_{\text{sub}}^2 + Qk_{\text{sub}}^3 + \dots \quad (3)$$

従って、外部源  $Q$  と核分裂源  $S$  の和は、

$$Q + S = Q + Qk_{\text{sub}} + Qk_{\text{sub}}^2 + Qk_{\text{sub}}^3 + \dots \quad (4)$$

と書ける。

この式に基づくと、未臨界系の全中性子源（外部源と核分裂源の和）は、外部源が増倍率  $k_{\text{sub}}$  で世代毎に増倍（漸減）していったものの全世代の和と考えることが出来る。

それでは、実際に未臨界系では中性子は世代毎に  $k_{\text{sub}}$  で増倍していくのであろうか？ 以下、その点について考える。

未臨界系の中性子輸送方程式は次のように書ける。

$$L\phi = F\phi + q \quad (5)$$

ここで、 $L$ 、 $F$  はそれぞれ、中性子の消滅、（核分裂による）生成についての演算子を示す。

さて、この固定源の方程式 (5) を解くために、次のような級数を考える。

$$\begin{aligned} L\phi_0 &= q, \\ L\phi_1 &= F\phi_0, \\ &\dots, \\ L\phi_i &= F\phi_{i-1}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (6)$$

これは中性子の増倍を世代毎に追っていることに対応する。未臨界系では  $i \rightarrow \infty$  のとき  $\phi_i$  はゼロに収束するので（それが妥当であることは本稿で示される）、式 (6) の両辺についてその和をとることで以下の式を得る。

$$L\sum_{i=0} \phi_i = F\sum_{i=0} \phi_i + q. \quad (7)$$

従って、系の中性子束は次のように書くことが出来る。

$$\phi = \sum_{i=0} \phi_i. \quad (8)$$

ここで、核分裂中性子源の世代間の比を世代毎の中性子源増倍率  $k_i$  と定義する（ただし  $i \geq 1$ ）。この定義式は以下の通りである。

$$k_i = \frac{\langle F\phi_i \rangle}{\langle F\phi_{i-1} \rangle} \quad (9)$$

さて、この世代毎の増倍率について考えるため、外部源  $q$  が形成する中性子束  $\phi_0$  を固有関数で展開する。系の前進、随伴の固有値方程式は以下のように書ける。

$$L f_k = \frac{1}{\lambda_k} F f_k, \quad (10)$$

$$L^+ f_k^+ = \frac{1}{\lambda_k} F^+ f_k^+ \quad (11)$$

なお、反射体位置に中性子源がある場合などでは  $\phi_0$  を固有関数で完全に展開できないことが指摘されている [1]。そこで、固有関数で表現できない残差項  $r$  というものを考え、 $\phi_0$  を以下のように書く。

$$\phi_0 = \sum_{k=0} a_k f_k + r, \quad (12)$$

また、展開係数  $a_k$  は次の式で求められる。

$$a_k = \frac{\langle f_k^+, F \phi_0 \rangle}{\langle f_k^+, F f_k \rangle}. \quad (13)$$

なお、この残差  $r$  であるが、核分裂生成演算子  $F$  を作用させた場合、ゼロになることが本稿の最後に示されている。

式 (12) を用いることにより、 $\phi_i$  は  $f_k$  を用いて以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \phi_i &= L^{-1} F \phi_{i-1} = (L^{-1} F)^i \phi_0 = \sum_{k=0} a_k (L^{-1} F)^i f_k + (L^{-1} F)^i r \\ &= \sum_{k=0} a_k \lambda_k^i f_k + \delta_{i0} r. \end{aligned} \quad (14)$$

この表現を用いると、世代毎の源増倍率  $k$  は次のように書ける。

$$k_i = \frac{\sum_{k=0} a_k \lambda_k^i \langle F f_k \rangle}{\sum_{k=0} a_k \lambda_k^{i-1} \langle F f_k \rangle} = \frac{\sum_{k=0} \lambda_k W_k}{\sum_{k=0} W_k} \quad (15)$$

ここで、

$$W_k = a_k \lambda_k^{i-1} \langle F f_k \rangle \quad (16)$$

である。これより、未臨界系での世代毎の中性子源増倍率は固有値の重み付き平均で決まることが分かる。また、重みは世代に依存するため、世代毎増倍率は世代毎に異なる値となる。世代数が大きくなるに従い高次固有値成分の重みは基本固有値成分と比較してずっと早くゼロに漸近するため、 $k$  は世代数の増加に伴い基本モード固有値に漸近していく。

さて、未臨界系の中性子束  $\phi$  は固有関数を用いて以下のように書ける。

$$\phi = \sum_{i=0} \phi_i = \sum_{i=0} \sum_{k=0} a_k \lambda_k^i f_k + r = \sum_{k=0} \frac{1}{1 - \lambda_k} a_k f_k + r \quad (17)$$

これより、未臨界系の中性子束分布は、固有関数の重ね合わせで表現される増倍成分と、外部源  $q$  により生成された中性子束分布のうちの残差項  $r$  (増倍しない成分) の和として表現されることが分かる。

### 3 数値計算結果

ここでは加速器駆動未臨界炉 (ADS) についての数値計算を行い、中性子の増倍特性を観察する。計算体系は文献 [2] のものを用い、中性子輸送計算は 10MeV 以下について 70 群断面積を用いて拡散コードにより行う。

はじめに、外部中性子源とそれにより生成される中性子による核分裂生成率  $\nu\Sigma_f\phi_0$  (ゼロ世代目の生成率) について、それらの炉心積分値のエネルギースペクトルを Fig. 1 に示す。ゼロ世代目の生成率エネルギースペクトルは、外部中性子源と同様に高エネルギー領域に

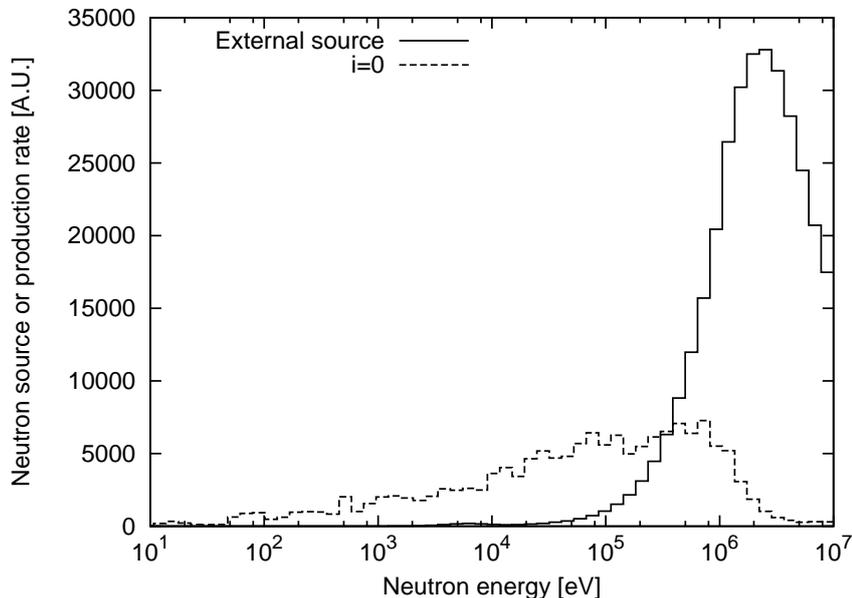


Fig. 1: Energy spectrum of external source and neutron production rate in the zero-th generation

ピークをもつ形となると想像されたが、軟らかいスペクトルとなった。これは、ターゲット領域で発生した高エネルギーの中性子が、ターゲットおよびバッファ領域に含まれる鉛、ビスマスにより減速されたのち燃料領域に到達することで説明できるであろう。

また、世代毎の全炉心積分生成率のエネルギースペクトルを Fig. 2 に示す。ゼロ世代目の生成率は幅広いエネルギー領域に分布している一方、一世代目以降は核分裂スペクトルの形となり、世代が進むにつれて減衰することが分かる。

次に、外部中性子源および核分裂中性子源の空間分布 (径方向分布) の比較を行う (軸位置はほぼ炉心中心面と考えてよい)。はじめに、外部中性子源と、全核分裂中性子源 (世代毎ではなく、全ての世代の総和) の分布を Fig. 3 に示す。また、世代毎の核分裂源の空間分布を Fig. 4 に示す。これより、ゼロ世代目の核分裂源は炉中心に近い位置にピークが立っていること、9 世代程度を経たのちは基本モード成分のみが残り、それが漸減していくことが分かる。

最後に、世代毎の中性子源増倍率の計算結果を Fig. 5 に示す。世代数が大きくなるにつ

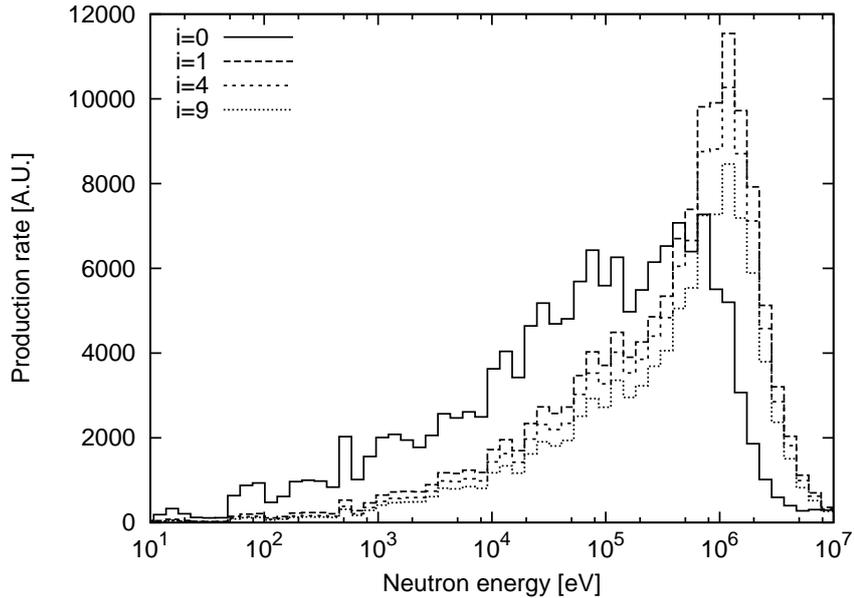


Fig. 2: Energy spectrum of neutron production rate in each generation

れて、基本モード固有値に漸近していく様子が分かる。

#### 4 おわりに

ここまで、「未臨界系の中性子増倍に対する考察」として書いてきたが、これに何か新しいものが含まれているのかどうかは定かではない。こうしてみると、当たり前のことをただつらつらと述べてきただけのような気もするが、それは筆者の理解がずっと深まったことによるものと考えことにする。いずれにしろ、この分野に馴染みのない方には、良い解説となっているのではないかと考えている。

実のところ、今回の筆者間の議論では、「任意の中性子束分布を固有関数系で表現できないというのは本当か」「固有関数系で表現できない残差項は核分裂生成演算子を作用させるとゼロになるのはなぜか」というところが主な対象となった。それについて、筆者の一人(遠藤)が証明に成功し、皆の気持ちが晴れたことは大変嬉しかった。

炉物理は「既にやり残されたものは無い」とまで言われる程に成熟した学問分野である。我々のような(比較的)若い世代はこれまでの先人達の偉業をフォローすることで精一杯であることから、それを否定するつもりは無い。ただ、今回のように、これまで常識と考えられてきたこと(任意の分布を固有関数で展開可能)が場合によっては妥当ではないこともあるわけで、これからは「疑いの目」(ちょっと語弊があるかもしれないがご容赦)もほんの少しは必要なのだな、と痛感した次第である。

なお、本稿で取り上げた点は、川口真一氏が強く主張されていたものである。彼の問題意識をこの文章である程度明確にできたことを我々は嬉しく思っている。

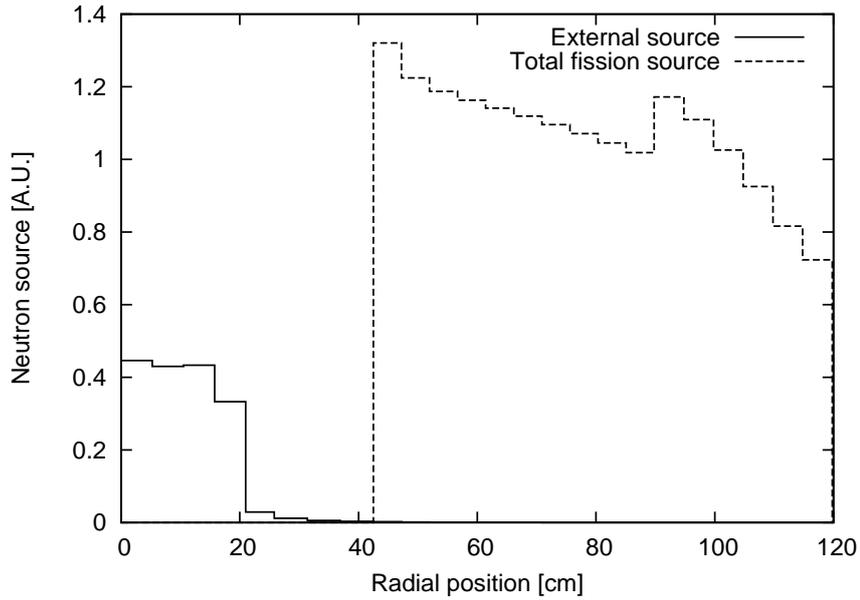


Fig. 3: Spatial distribution of external source and fission source

### 参考文献

- [1] S.Kawaguchi, *et al.*, 'Application of imaginary source multiplication method to subcriticality measurement,' *Proc. of Int. Conf. on the Physics of Reactors, PHYSOR2008*, Interlaken, Switzerland (2008).
- [2] K. Tsujimoto, *et al.* 'Neutronics design for lead-bismuth cooled accelerator-driven system for transmutation of minor actinide,' *J. Nucl. Sci. Technol.*, **41**, p.21-36 (2004).
- [3] R.Aigle, *et al.*, 'On the completeness of the multigroup eigenfunctions set of a reactor system Boltzmann operator,' *Ann. Nucl. Energy*, **21**, p.445-460 (1994).
- [4] A.F.Henry, 'Nuclear Reactor Analysis,' Chapter 8.

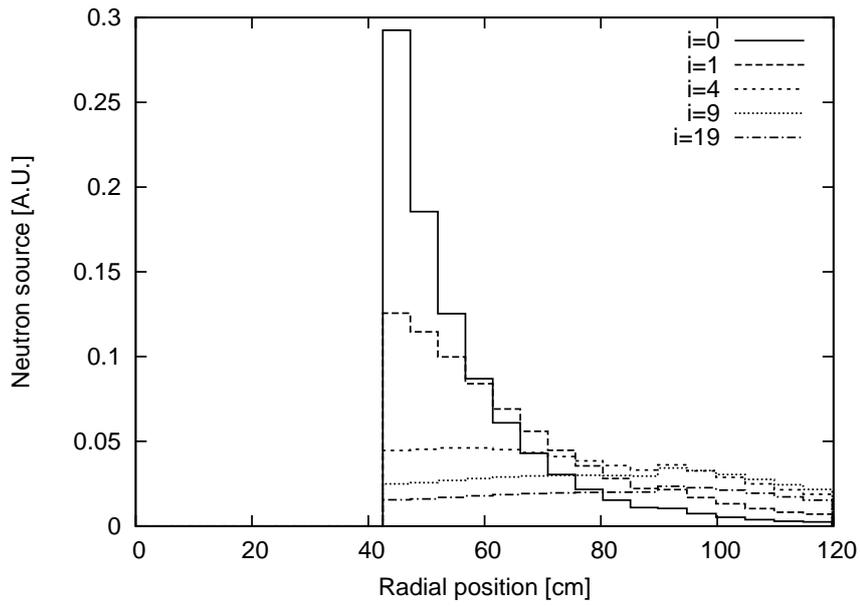


Fig. 4: Spatial distribution of fission source in each generation

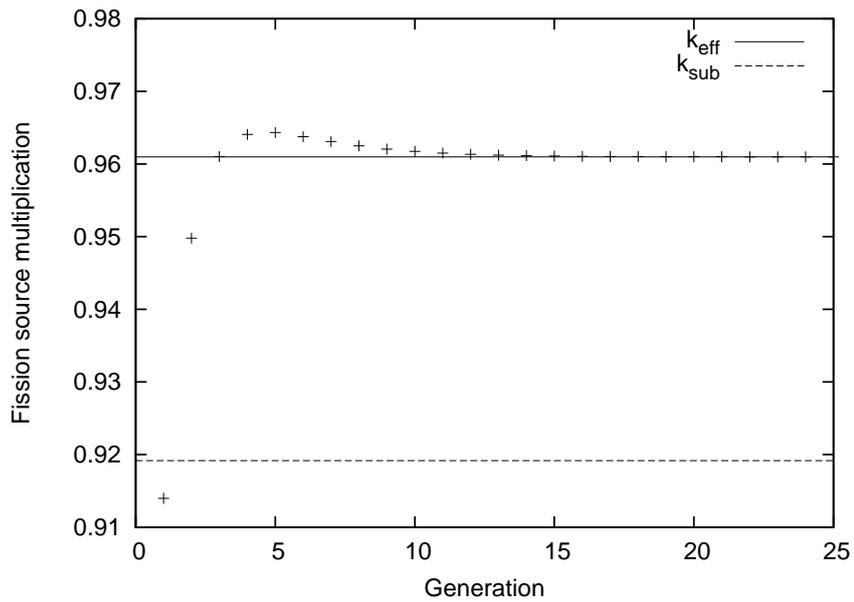


Fig. 5: Fission source multiplication per generation

## A 「おわりに」のあとで

ここまで本稿をまとめ、固有関数が完備ではないことや固有関数で展開しきれずに残る残差項の特性などについて筆者間である程度理解が深まったころ、文献 [3] に引用されている Henry 先生の教科書 [4] に目を通し、驚いた。そこに全てが書いてあったからである。以下、Henry 先生の教科書の記述の一部 (p.347) を紹介する。

- 固有関数が完備であるかどうかはよく知られていない。
- ただし、固有値  $\lambda = 0$  の固有関数が含まれていない場合、固有関数は完備ではないことが分かっている。
- $\lambda = 0$  に対応する固有関数は無数にある。

なお、ここで言っている  $\lambda = 0$  に対応する固有関数は

$$F f_n^{(0)} = 0 \quad (18)$$

を満足する関数である。

川口氏が問題点として指摘し、我々が議論を重ねた「固有関数は完備ではない」という点は、上記項目の二点目に該当していることになる。つまり我々は、固有値  $\lambda = 0$  の固有関数を議論のなかで見落としていた、ということになる。

Henry 先生の教科書によると、「positive evidence」は無いが、任意の関数  $g$  は以下のように展開できると仮定すると便利とのことである。

$$g = \sum_{k=0} a_k f_k + \sum_{n=0} a_n^0 f_n^{(0)} \quad (19)$$

つまり、我々の議論における残差項  $r$  は上式の  $a_n^0 f_n^{(0)}$  に対応しており、これに核分裂生成演算子  $F$  を作用させればゼロになることは自明である。

筆者の一人 (遠藤) は、任意の関数を固有関数  $f_k$  で展開した場合に現れる残差  $r$  について、それに  $F$  を作用させるとゼロとなることを、空間、エネルギーについて離散化した場合については示している。これが、Henry 先生の言う「positive evidence」になり得るのではないかと考えられるが、この点については筆者間でまだ同意がされていない。

結局のところ、我々は Henry 先生の掌の上でもがいていたようなものであった。

傍から見ればそれは滑稽なことであったかもしれないが、だからと言って恥じる気持ちは毛頭なく、むしろ、みんなでもがいたことは楽しかったし、もがいたあとに与えられた Henry 先生の教唆は、風呂あがりのビールのように心地よいものであった (大袈裟?)。

深遠な炉物理の世界は全人生を捧げてその全てを知ることはできないであろうし、「目に見える成果」や「資金の獲得」が重要となる昨今、そういったものに直接繋がらないことにかかる時間はそれほど無い。ただし、研究機関や大学に身を置く「炉物理研究者」としては、深く広がる炉物理の世界を探求しようとする姿勢だけは忘れずにいたいものである。