炉物理研究における私の Eureka !

京都大学名誉教授　小林啓祐*

1　はじめに

編集委員から「私の Eureka!」を書いて欲しいとの依頼のメイルを受け取ったが、Eureka の意味が分からずはたと困った。英語でもなさそうだったがパソコンに入っている英語の辞書で調べたら、見つけた!, わかった!, しめた! の意味で米国 California 州の標語だと言うことが分かった。勿論歴史に残るアルキメデスのような大発見は無いけれども、私なりの小さな発見について書くことにする。

学生の時は卒論と修論は原子核実験だったので、炉物理の勉強を始めたのは京大に助手として勤め始めてからであった。最初この分野の最も良い本を勉強しようと言うことで、当時は新しかったワインバーグ・ウィグナーの ”The Physical Theory of Neutron Chain Reactors” を数名で輪読し丁度１年間で読み終えた。これで炉物理の基礎は何とか分かったと思った。これを挫折せずに最後まで読み終えたのは、この本を提案したＦ氏の熱意のお陰で、彼には今も感謝している。当時は、日本最初の電子計算機が京大で使えるようになってからあまり経っていなかったので、拡散方程式を解く計算コードも我々には無かった。何をするにも拡散方程式を解くコードは必要であり、先ず１次元拡散コードを作ろうと思った。

2　厳密な３点階差式

今も使われている有限差分式は、メッシュ幅を無限小にした極限では正確であるが、有限幅の時は近似である。当時も外国では有限差分コードは既に色々と作られており、今更同じものを作っていては論文にはならない。通常の差分式よりは精度の高い式は作れないかあれこれ考えた。

この頃、修士の学生のＵ君が、４回生の卒論の仕事を研究会で発表した。非均質炉を扱うのに、ファインバーグおよびガラーニン等のソースシンク法 (source sink method) があり、それは燃料棒の吸収を無限に細い線状と近似してデルタ関数で扱って全体系を解く方法である。Ｕ君は無限に細いと言う近似を止めて有限の半径の吸収体とし、燃料体中と減速材中のグリーン関数を別々に求めて使う数学的に巧妙な式を導いた。上に述べたＦ氏は数学に達者でＵ君の式はおかしいと云っていたがＵ君も数学は良く出来、どちらの言い分が正しいか私には分からなかった。

炉物理をやるにはもっと数学の知識が必要だと痛感したので、３回生の数学演習および量子力学演習を担当し、寺沢寛一の「数学概論」(岩波書店) の演習問題をほぼ全て解き、シッフの量子力学の演習問題も相当解いた。また、当時の研究室の学生を誘ってクーラン・ヒルベルトの「物理数学の方法を」を輪読した。これを読んで、グリーン関数の意味や求め方が良く分かった。この段階でＵ君は私が数学が少しは分かるようになったと認めてくれたためか、彼が４回生の時にグリーン関数を使った方法を丁寧に（と言っても１０分位) 説明してくれたので、初めて彼の巧妙なアイデアを理解できた。彼の説明を聞きながら、その方法でグリーン関数を使うと厳密な階差式が得られるのではないかと、ふとひらめいた。

早速式を書いてみて、１次元板状では厳密な３点階差式が導けることが分かった時は手が震えた。これが炉物理における私の「見つけた!」の最初の経験であった。これが本当に世界最初の仕事であるかどうかを知るために、１次元円柱および球状の場合の式を追加した論文をアメリカの原子力学会誌

*kobayashi.keisuke@emp.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

(N.S.E.) へ送った。数ヵ月後に編集者から届いた手紙の封を切るときは緊張した。一人のレフェリーは、この論文はワックスプレス (Wachspress) が一次元板状で源が一定の時に導いた厳密な 3 点階差式を源が任意の形をした時へ拡張し、さらに円柱および球状体系の場合も導いたもので、掲載の価値ありと書いてあり、ほっとした [1]。二人目のレフェリーは、当時 NAIG に居た清水さんおよび青木さんの応答行列法との関係を書けとあった。

式は単純なので少し説明しよう [文献 2, p.258]。源 $q(x)$ は既知として、解くべき拡散方程式は次式とする。

$$H\phi(x) = q(x), \quad \text{ただし} \quad H = -\frac{d}{dx}\left(D\frac{d}{dx}\right) + \Sigma_r. \tag{1}$$

この微分方程式の解は形式的には次の様に書ける。

$$\phi(x) = H^{-1}q(x). \tag{2}$$

この演算子 H の逆演算子 H^{-1} がグリーン関数と呼ばれるものである。適当に分割した領域 $x_n \leqq \xi \leqq x_{n+1}$ で、式 (2) を具体的に求めるためのグリーン関数は次式で定義される。

$$H^{\dagger}G_n(x,\xi) = \delta(x-\xi), \quad x_n \leqq \xi \leqq x_{n+1}. \tag{3}$$

演算子 $H^{\dagger}$ は演算子 H の共役演算子で、今の場合は H に等しい。式 (1) に $G_n(x,\xi)$ を掛け、式 (3) に $\phi(x)$ を掛けて適当な領域 $x_n \leqq \xi \leqq x_{n+1}$ で積分を行い g について加えて差を取り、x を ξ に, ξ を x と書き換えると次式を得る。

$$\phi(x) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} G_n(x,\xi)q(\xi)\xi d\xi + \left(G_n(\xi,x)D\xi\frac{d\phi(\xi)}{d\xi} - \phi(\xi)D\xi^{\alpha}\frac{dG_n(\xi,x)}{d\xi}\right)\Bigg|_{\xi=x_n}^{\xi=x_{n+1}}. \tag{4}$$

この式を見ると、右辺には中性子束は境界値のみを含んでいる。それ故、左辺の x の値を x_n か x_{n+1} と置くと、中性子束の境界値の間の関係式が得られる。それらの関係式から境界での中性子束の微分項を消去すると、次式の形の 3 点階差式が得られ、これは領域の間隔に無関係に成り立つ厳密な式である。

$$-a_n\phi(x_{n-1}) + b_n\phi(x_n) - c_n\phi(x_{n+1}) = d_n, \quad n = 2, 3, ..., N-1. \tag{5}$$

大型軽水炉のゼノン振動は炉心を振動の起こる二つの炉心に分けて考えることが出来る。この二つの炉心に上記のようなグリーン関数を利用し、ゼノン振動の減衰定数や周期を簡単に得られる式を導いて学会誌に掲載した。しかし、この論文ではゼノンの空間分布を近似するなど幾つかの近似を行っていて、後味は良くなかった。厳密な式や解は一つしかないけれども、近似的な式や解は五万とあり、その様な論文は余り気に入らなかった。しかし、1990 年にロンドン大学の輸送計算法のセミナーで、ウィリアムズ教授 (M.M.R. Wiliams) に初めて会った時、日本の原子力学会誌にゼノン振動の論文を書いたこばやしは君かと尋ねられたときは全く驚いた。式がスマートで面白そうだったので、学生に同じ計算をやらせたと言っていた。日本人が欧米人の論文を読んで似たような計算をするのは通常のことであるが、その逆をイギリス人がするとは思って居なかった。

その後、このグリーン関数を使う方法を 2 次元 $x-y$ 座標の問題に応用することを考えた。2 次元のグリーン関数は級数になり扱いにくい。それで、解は適当な領域毎に変数分離が可能であると仮定して、$x-$ 軸および $y-$ 軸方向の 1 次元のグリーン関数を利用して解く近似的な方法を考え、N.S.E. へ投稿した [3]。レフェリーのコメントに、N.S.E. に掲載される全ての論文がこのような論文であることを望む、と書いてあったのでびっくりした。

一般には、2 及び 3 次元のグリーン関数は簡単ではないので実用性は無いと考えこの線上の研究は中止した。しかし後に、アメリカのドーニング教授 (J. Dorning) が私の論文を引用して 2 次元問題へ

の拡張を行った事を知った。グリーン関数を使う代わりにフーリエ変換を有限領域に適用する方法を考えた。この有限フーリエ変換法は [文献 2, p.288] 2 及び 3 次元の問題は 1 及び 2 次元の問題として解け、多くの問題で使える有力な方法であると思っている。1 次元の場合は 0 次元の問題、すなわち点毎での問題になり、上記のグリーン関数を使ったときと同じ厳密な 3 点階差式が得られる。ここでは紙面の制限があるので省略する。

3 結合炉の理論

ある委員会で、未臨界体系の未臨界度を測るために、体系の中央に未臨界体系を置き、その周りを別のドライバー領域で囲む、ドライバー領域の制御棒を動かして反応度を変化させて中央の体系の未臨界度を測ると言うアイデアの検討結果が発表された。その計算には、1958 年のジュネーブ会議に発表されていたエイブリ (Avery) の結合炉の理論が使われていた。後で Avery の論文 [5] を眺めてみたが、式の導出が不自然でぴんと来なかった。例えば炉心 1 から炉心 2 への結合係数 k_{21} は、炉心 1 で生まれた 1 個の中性子が炉心 2 で作る中性子数と定義されていたが、その定義式は物理的な直感で定義されていて、数学的に得られたものではなかった。

この問題を頭に入れて何ヶ月か経ったある日、宮崎大学へ非常勤講師で行っていた時突然に、もしかしたらグリーン関数を使うと旨く式が導けるのではないかとひらめいた。帰京して早速紙と鉛筆を取り出して、やや震える手で式の導出を試みた。約 2 〜 3 時間かけて定常状態の場合は、グリーン関数を使って炉心間の結合係数を数学的に厳密に定義出来、その結合係数を使って各炉心中の中性子発生数を関連付ける式を導けることが分かった。次に直ちに時間依存の場合を考えた。中性子寿命に相当する定数の定義式が式 (15) に示すようにやや複雑であったが、この定義式以外にエイブリの想定した簡潔な形の式が得られなかったのでそれを採用した。これ等をまとめてイギリスの Annals of Nuclear Energy に投稿し、掲載された。手を付けたのが月曜日、投稿したのが同じ週の金曜日で、論文を書くのに要した時間の最短記録を作った。

これを簡単に説明しよう。[参考文献 2, p.681] ここでは簡単のために遅発中性子を無視すると、定常状態の多群拡散方程式は次式のように書ける。

$$A\phi_g(\boldsymbol{r}) = \frac{\chi_g}{k}s(\boldsymbol{r}), \qquad \phi_g(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{k}A^{-1}\chi_g s(\boldsymbol{r}), \tag{6}$$

$$\text{但し } A = -\nabla D_g \nabla + \Sigma_{rg} - \sum_{g'} \Sigma_s(g \leftarrow g'), \quad F = \sum_{g'} \nu\Sigma_{fg'}, \quad s(\boldsymbol{r}) = F\phi_g(\boldsymbol{r}). \tag{7}$$

式 (6) に対するグリーン関数は演算子 A の共役演算子 $A^\dagger$ を使って，次式で得られる。

$$A^\dagger G(\boldsymbol{r}, g; \boldsymbol{r}', g') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta_{gg'}. \tag{8}$$

式 (6) に $G(\boldsymbol{r}, g; \boldsymbol{r}', g')$ を掛け，式 (8) に $\phi_g(\boldsymbol{r})$ を掛けて全体系 V で積分し，g について加えて得られた式の差をとり，g と g'，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を入れ換えると次式が得られる。

$$\phi_g(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{k}\int_V \sum_{g'} \chi_{g'} G(\boldsymbol{r}', g'; \boldsymbol{r}, g)s(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'. \tag{9}$$

式 (9) に $\nu\Sigma_{fg}(\boldsymbol{r})$ を掛けて全エネルギー群について加えると，次式

$$s(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{k}\sum_g \nu\Sigma_{fg}(\boldsymbol{r})\int_V d\boldsymbol{r}' \sum_{g'} G(\boldsymbol{r}', g'; \boldsymbol{r}, g)\chi_{g'}s(\boldsymbol{r}'), \tag{10}$$

が得られる。一方式 (8) に $\nu\Sigma_{fg'}(\boldsymbol{r}')$ を掛けて $\boldsymbol{r}'$ について領域 V_m で積分し，g' について加え，次式で定義する重要度関数

$$G_m(\boldsymbol{r},g)=\int_{V_m}d\boldsymbol{r}'\sum_{g'}\nu\Sigma_{fg'}(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},g;\boldsymbol{r}',g'), \tag{11}$$

を使うと，領域毎の重要度関数を簡単に求められる次式が得られる。

$$A^{\dagger}G_m(\boldsymbol{r},g)=\nu\Sigma_{fg}(\boldsymbol{r})\delta_m(\boldsymbol{r}),\quad m=1,2,..,N. \tag{12}$$

ただし $\delta_m(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ が領域 V_m にあるときに 1 をとり，それ以外では零となる関数である。ここで領域 V_n から領域 V_m への結合係数 k_{mn} を次式で定義する。

$$k_{mn}=\frac{\sum_{g'}\int_{V_n}d\boldsymbol{r}'\chi_{g'}\int_{V_m}d\boldsymbol{r}\sum_{g}\nu\Sigma_{fg}(\boldsymbol{r})G(\boldsymbol{r}',g';\boldsymbol{r},g)s(\boldsymbol{r}')}{\int_{V_n}d\boldsymbol{r}'s(\boldsymbol{r}')}=\frac{\sum_{g'}\int_{V_n}d\boldsymbol{r}'\chi_{g'}G_m(\boldsymbol{r}',g')s(\boldsymbol{r}')}{\int_{V_n}d\boldsymbol{r}'s(\boldsymbol{r}')}. \tag{13}$$

式 (10) を領域 V_m で積分し、式 (13) の結合係数の定義を使うと核分裂源 s_m の関係を示す結合炉の式

$$s_m=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{N}k_{mn}s_n,\quad \text{ただし}\quad s_m=\int_{V_m}s(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}, \tag{14}$$

が得られる。

時間依存の式は、式 (14) を導いた時と同じ重要度関数式 (11) を時間依存の多群拡散方程式に掛けて積分し、また中性子寿命に関係するパラメータ等

$$l_m(t)=\frac{\int_V d\boldsymbol{r}\sum_g G_m(\boldsymbol{r},g)\frac{1}{v_g}\frac{\partial\phi_g(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}}{\int_{V_m}d\boldsymbol{r}\frac{\partial F'\phi_g(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}},\quad s_m(t)=\int_{V_m}s(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r},\quad s(\boldsymbol{r},t)=F\phi_g(\boldsymbol{r},t), \tag{15}$$

を使うと、次の形の時間依存の多点炉動特性方程式が得られる。

$$l_m(t)\frac{ds_m(t)}{dt}=-(1-\Delta k_m^F(t))s_m(t)+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{k}k_{mn}(t)-\Delta k_{mn}^A(t)\right)s_n(t), \tag{16}$$

式 (15) のパラメータは見たことも無い複雑な形をしているが、後にその物理的な意味は明確で、中性子生成時間を表していることを示すことが出来た [6],[7]。

外部源のある未臨界体系でも式 (16) に似た式を導くことが出来る。その時の結合係数 k_{11} は外部源のあるときの体系の増倍率を示しており、加速器駆動の未臨界体系で、源をどの位置に置けばどれ位の増倍率が得られるか等の未臨界体系の解析に使うことが出来る。

定常状態の体系に摂動が加わった後の時間依存の問題を解く時は、摂動論を使う必要がある。一般化摂動論を使うと、摂動の１次の項を考慮に入れた式が得られることが１点炉の場合に示すことが出来た [8]。多点炉の場合への応用は現在進行中である [9]。

4　あとがき

ミケランジェロは何故そんなにすばらしい彫刻を彫れるのかと問われて、自分は石の中に埋もれている彫像を掘り出しただけだ、と答えたと読んだことがある。同じ石から同じ彫像は決して作れないはずで、そのような答えは非凡な才能のある者しかできないことである。修練を積まない人間が掘り出そうとしても石片が出てくるだけである。私の場合は、誰がやっても全く同じ結果が得られるわけで、その容易さはミケランジェロとは比較にならない。それにも拘らず簡潔な式が導けた時は、まさに数学の巨岩の中から幸運にも簡潔明快な式を掘り出せた、と嬉しい気持ちで一杯であった。これが可能になったのは周りに優秀な同僚と学生が居て、数学の学習を興味を持って行えたからだと思う。

前述のワンバーグ・ウィグナーの本は大変な名著で、将来はこれに負けないような本を書きたいものだと思った。そして定年退官の少し前に完成したのが参考文献に挙げてある「原子炉物理」である。字の大きさと中身の質を無視すればページ数と本の厚さはワンバーグ・ウィグナーの本になんとか匹敵している。まあ内容は時代が新しい分だけ、より実用的になっていると思う。

前述の様にロンドン大学でウィリアアムス教授に会ったとき、彼から炉雑音の著書の日本語訳を頂いたのでこの本が出来たときにお返しに送った。最近、ウィリアアムス教授からステイシー教授 (Weston M.Stacy) の著著 "Nuclear Reactor Physics" の書評の原稿を送ってきた。ステイシー教授はアメリカでも大変論文数の多い人として有名であり、詳細な書評を読むと非常に広範囲に渉って書かれており、さすがにすばらしい本を書かれたものと感心した。しかし、所々かなり厳しい評価がされており、欧米人の遠慮の無い批評は厳しいものだと痛感し、これと同じやり方で私の著書が評価されたらたまらないなあと思った。しかし、文章の終わりの方に私の著書について、次のように書いてあるのを見た時は仰天した [10]。

Of course my all-time favourite is "Genshiro Buturi" by Keisuke Kobayashi published in 1996 (pp795). To the Japanese speaker this title translates as "Reactor Physics". Unfortunately Kobayashi's book is in Japanese; I do not speak or read Japanese but I can read mathematics and one can sense immediately that "Genshiro Buturi" is a classic. What a pity that Wiley-Interscience did not get that translated, since it outshines Duderstadt and Hamilton as well as Stacey.

数学の知識無しに炉物理理論を展開することは不可能なことである。若い人々が数学を敬遠することなくその重要性を認識して習熟に励み、世界に通用する理論式を生み出されることを期待してやまない。

REFERENCES

[1] K. Kobayashi and H. Nishihara, "Solution of Group-Diffusion Equation Using Green's Function", Nucl. Sci. Eng. **28**, 93-104 (1967).

[2] 小林啓祐, 「原子炉物理」[†], pp795 コロナ社 (1996).

[3] K. Kobayashi "Flux Synthesis Using Green's Function in Two Dimensional Group-Diffusion Equations", Nucl. Sci. Eng. **31**, 91-101 (1968).

[4] K. Kobayashi, "Rigorous Derivation of Nodal Equations for Coupled Reactors", *Ann. nucl. Energy*, **18**, pp.13-18 (1991).

[5] R. Avery, "Theory of Coupled Reactors", *Proc. 2nd U.N. Int. Conf. Peaceful Use of Atomic Energy*, Vol.**12**, p182, United Nations (1958). "Rigorous Derivation of Multi-Point Reactor Kinetics Equations with Explicit Dependence on Perturbation", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **29**, pp.110-120 (1992).

[6] K. Kobayashi, "Physical Meaning of Kinetics Parameter "Lifetime" Used in the New Multi-Point Reactor Kinetics Equations Derived Using Green's Function" *Ann. nucl. Energy*, **23**, pp.827-841 (1996).

[7] K. Kobayashi, "Region-Wise Neutron Generation Times in Multi-Region Reactors", *J. Nucl. Sci. Technol.*, **33**, pp.451-454 (1996).

[8] K. Kobayashi, "Calculation of Kinetics Parameters of Coupled Reactors Using the Generalized Perturbation Theory", *Proceedings of Joint Int. Conf. on Mathematical Methods and Supercomputing for Nuclear Applications*, Saratoga Springs, Vol.2, 1191 (1997). III "Perturbation Theory for Nuclear Reactor Analysis", p.63 (1986).

[9] K. Kobayashi, " MULTI-POINT KINETICS EQUATIONS USING GENERALIZED PERTURBATION THEORY", to be presented at PHYSOR 2002, Seoul, Korea, October 7-10, 2002.

[10] M.M.R. Williams, "Nuclear Reactor Physics, Weston M. Stacy, Wiley Interscience, 2001, pp707, *Ann. nucl. Energy*, **28**, pp.1783-1787 (2001).

[†]p.658 の **10.2 最小臨界質量** の式には間違いがあるので、「最小臨界質量を与える燃料分布」, 日本原子力学会誌, **40**, 144-151, (1998) を参照して頂きたい。